Nachtrag

zu

der Anleitung

zur

Cubik-Rechnung,

insbesondere

die Lehre

der

Fässer-Berechnung

betreffend.

Von

C. L. Schübler.

Stuttgart,

bei Franz Christian Löflund.

1817.

Nachtrag
zu
der Anleitung
zur
Cubik-Rechnung,
insbesondere
die Lehre
der
Fässer-Berechnung
betreffend.

Von
C. L. Schübler.

Stuttgart,
bei Franz Christian Löflund.
1817.

§. 1.

Von den Vorkenntnissen, welche zu Fässer-Berechnungen nothwendig sind.

Wer sich mit der Ausmessung von Fässern, und mit der Berechnung ihres cubischen Innhalts beschäftigen, oder Berechnungen, welche andre darüber geführt haben, beurtheilen will, muß mit verschiedenen geometrischen Vorkenntnissen versehen seyn, von welchen die nachstehenden die vorzüglichsten sind:

1) Er muß eine gute Einsicht davon haben, wie man walzenförmige Körper, Cylinder, berechnet; und zwar nach welchen Formeln, ohne große Schärfe (nach ganz gemeiner Art), und nach welchen anderen, genauer und schärfer, mit größerer Annäherung an den wahren Gehalt.

2) Er muß auch die Methode kennen, parallel-abgekürzte Kegel, (oben abgestumpfte conische Körper) zu berechnen:

3) Kugel-Abschnitte, oder Segmente von Kugeln (da den ganzen Kugeln oben und unten parallel-abgeschnittene Stücke fehlen.)

4) Elliptische Körper, oder Ellipsoiden, und insbesondere abgekürzte (abgestumpfte) Ellipsoiden.

Da die Krümmungen der Faß-Dauben sehr verschieden sind, so kommen freylich auch

paraboliſch- und muſchelförmig-gekrümmte Fäſſer

vor, und dem gründlichen Faßberechner ſollten daher allerdings auch die Berechnungen der Parabel und Konchoide (der Muſchel-Linie) nicht fremd ſeyn. Allein die Ausdehnung der erforderten Kenntniſſe läßt ſich doch auf die angegebenen vier Punkte beſchränkten, inſoferne man nur die am allermeiſten vorkommenden Fälle berückſichtiget. Selbſt dieſe vier ſchon ſind für unſre praktiſche Meßkünſtler zu viel, indem die meiſten derſelben von nichts anderm, als von Cylinder-Rechnungen etwas hören und annehmen wollen. — Ob der Vortrag in den nächſt folgenden Blättern eine beſſere Ueberzeugung bei ihnen hervorbringen dürfte, muß für jezt dahin geſtellt bleiben. Derſelbe ſoll mit möglichſter Deutlichkeit eben für die gedachte Art von Meßkünſtlern eingerichtet werden.

§. 2.

Von walzenförmigen Körpern und ſogenannten Faß-Cylindern.

Jeder, der eine regelmäßige, ſenkrecht ſtehende Walze, (einen Cylinder) und ein darneben ſtehendes Faß mit deſſen bauchigten Wölbungen, betrachtet, erkennt die in die Augen fallende Verſchieden-

heit der beiden Körper. Das Faß ist offenbar einer oben und unten abgekürzten Kugel ähnlicher, als einem Cylinder, und in den allermeisten Fällen, noch mehr,

einem oben und unten (durch parallele Schnitte) abgekürzten Ellipsoid.

Dieses gesteht gewiß jeder zu, der irgend eine richtige Vorstellung von dem, was ein Ellipsoid ist, gefaßt hat. Auch, wenn man nur einen Blik auf die angehängten Figuren in Tab. II. unseres Buchs wirft, besonders auf Fig. XVI. XVII. XVIII. wird man der Ueberzeugung hievon nicht widerstehen können. Weil aber Cylinder sich bequemer berechnen lassen, als Kugel-Abschnitte und Sphäroiden von elliptischen Körpern, so hat man schon seit mehreren Jahrhunderten alle zu berechnende Fässer in Cylinder gleichsam zu verwandeln, und, nach Voraussetzung gewisser Annahmen, sie als solche zu berechnen gesucht. Man hat sich dabei vorzüglich der Betrachtung hingegeben:

„Ein Cylinder, dessen Grundfläche nur ein „Durchmesser zukäme, welcher dem des Faß„Bodens gleich wäre, (gleich der Linie NM „in Fig. XV.) würde, wenn die Cylinderhöhe „der innern Faß-Länge NO gleichgesezt würde, „ganz gewiß einen kleinern Cubik-Innhalt „haben, als das ganze Faß; — und dagegen: „Wenn dieses Cylinders Grundfläche die Länge der Spund-Tiefe DC zum Diameter hätte,

„zur Höhe aber wieder, wie vorher, die innere „Faß-Länge NO, so würde nothwendig der Cu„bik-Innhalt dieses zweyten Cylinders größer „seyn, als der des Fasses.

Der wahre Faß-Innhalt muß also zwischen die Innhalte dieser 2 Cylinder hineinfallen, (dachte man weiter) und er mag wohl nicht ferne von der halben Summe der 2 Cylinder Gehalte liegen; das heißt: „man darf das arithmetische Mittel von 2 so vorhandengedachten Cylindern für den wahren innern Betrag des Fasses füglich annehmen.“

Diese Schlußfolge war nicht genau, und sie hält in der That keine scharfe Prüfung aus. Allein man nahm seine Zuflucht zu einigen wirklichen Versuchen, und daraus gefolgerten Erfahrungen, und berief sich einmal darauf, wenn es gleich nur einige waren.

Man füllte mehrere Fässer mit Wasser bis oben an, bemerkte sich die Anzahl der Kannen, Maase, oder Eymer, und nahm dagegen Berechnungen auf die gedachte Weise vor, indem man der Spundtiefe mit einem Senkel genau sich versicherte, der Bodendurchmesser ebenfalls; und dazu der innern Länge des Fasses, welche immer die Höhe der 2 Cylinder bestimmte. Weil nun allerdings das arithmetische Mittel der zwey berechneten Cylinder-Gehalte mit dem geeichten Wasser-Gehalt manchmal zusammen-

traf, öfters sich diesem doch näherte, so erlaubte man sich den Schluß:

„Das Faß läßt sich auf diese Weise gar wohl „in einen mittlern Cylinder verwandeln, und „für einen solchen annehmen.“

Auf diese Weise ist die Uebung entstanden, von Faßcylindern zu sprechen, welche man auch „verglichene, coäquirte Cylinder benannt hat.“

Bald sah man nun wohl ein, daß bei der Verschiedenheit der Verhältnisse zwischen dem Boden-Durchmesser und der innern Länge des Fasses, und bei der ungleichen Krümmung der Dauben, z. B. oben vom Boden-Durchmesser-Ende bis an den Spunden, die angeführte Rechnungs-Weise nicht als eine allgemeine Regel gültig seyn könne, und erkannte, daß der wahre Erfund des Innhals mehrmals bedeutende Abweichungen von den Aussprüchen des Calkuls gebe. Man sahe sich deßhalb nach andern Rechnungsformeln um. Diese trafen in manchen Fällen besser zu, in manchen andern aber auch wieder nicht. Darüber verfiel man auf allerlei Vorschläge, welche sich nicht in wenigen Bogen nur erzählen lassen. Was für viele Liebhaber dieser Rechnungen aber doch immer dienlich seyn möchte, sey hier in Kürze, wie folgt, zusammengestellt.

§. 3.

Ausführung einer besondern Faß-Berechnung.

Man bezeichne die Linie der Spund-Tiefe kurz mit dem Buchstaben V. In der Fig. XV. ist also DC = V; in Fig. XVII aber wäre DA = V; was auch in der Küfer-Sprache die Höhe des Sezbodens genannt wird.

Den Faßboden-Durchmesser aber nenne man kurz = F; was auch die Boden-Weite, oder die Höhe an den Köpfen heißt; In Fig. XV ist NM = F; in Fig. XVII ist da = F.

Die innere Länge des Fasses (in diesen 2 Figuren NO und no;) sei kurz = L genannt; Bei den Küfern auch die kürzeste Daube des Fasses.

Nun wird der Cubik-Innhalt eines Cylinders allgemein vorgestellt = ($\frac{1}{4}$V. V. $\frac{314}{100}$. L.) seyn; *) oder $\frac{1}{4}V^2$. 3,14. L, wenn dem Durchmessər seiner Grundfläche die Linie V zukommt, d. h. die Spund-Tiefe, in Schuhen oder Zollen ausgesprochen, und

---

*) Man sehe in der Anleit. zur Cubik-Rechnung S. 145 bis 146 die Erläuterung dieser Formel nach, wo angegeben ist, was sie mit Worten ausgesprochen, bedeutet. Jede Cylinder-Berechnung beruht auf solchen drei Factoren, von welchen ($\frac{1}{4}$ VV) der erste ist, 3,14 oder $\frac{314}{100}$ der zweite, und L der 3te, welcher S. 146 mit dem Buchstaben h angedeutet worden.

seiner Höhe die Linie L. Dieses wird der Cylinder seyn, welcher größer, als das Faß ist, (ganz nach S. 5. dieser gegenwärtigen Abhandlung.)

Dagegen wird dem kleinern Cylinder, dessen Grundfläche der Durchmesser F zukäme, welcher von dem Faßboden entlehnt wäre, der Ausdruck ($\frac{1}{4}$FF. 3,14. L) zukommen, und dieser Innhalt wird kleiner, als der des Fasses ausfallen.

Addirt man die Gehalte dieser 2 Cylinder, und nimmt die Hälfte der sich damit ergebenden Summe, oder (was eben so viel ist) nimmt man das arithmetische Mittel, so wird dieses betragen $= \frac{1}{8}$. (VV + FF). 3,14). L. Denn so viel kommt, ins kurze gezogen, heraus, wenn man addirt:

$\frac{1}{2}.[\frac{1}{4}.VV.3{,}14\ L + \frac{1}{4}.FF.3{,}14.L]$

Wer auch nur wenige Einsicht hat, wie man Zahlen und Buchstaben ins Kurze zusammenzieht, wird den kürzern Ausdruck wohl verstehen können $\frac{1}{8}$.(VV + FF).3,14.L.

Man nehme ein Beispiel in bestimmten Zahlen vor die Hand.

Es sey ein Faß angenommen, in welchem die Spund-Tiefe 5 Schuh 6 Decimal-Zoll im Längenmaß halte; der Bodendurchmesser 5 Schuh; die innere Länge aber 6 Schuh. Da ist also V = 5,6; F ist = 5; L = 6. Die Spund-Tiefe quadrirt, oder VV ist = $(5{,}6)^2$ oder 31,36 d. h. 31 Quadr. Schuh, 36 Qu. Zoll; und F quadrirt oder F.F ist

= 25. Die Summe beyder Quadrate (VV + FF) ist = (31,36 + 25) oder 56,36. Diese Zahl braucht man nun zu der Ausrechnung des Faß-Inhalts. Denn dieser ist, nach angeführten Vorschriften:

$\frac{1}{8}$[VV + FF] . 3,14 . L

jezt in bestimten Zahlen: $\frac{1}{8}$[56, 36] . 3,14 . 6.

Das Product ist = 132, 7278 Cub. Schuhe. Und diese geben den Innhalt von 10,6182 Würt. Eimern oder von 1698,916 Maas (Helleich).

Damit ist die ganze Rechnung vollführt. Wer mit Decimalen rechnen kann, wird das Product leicht mit ebendemselben Ausdruck (= 132,7278) finden. Wer nicht auf diese Weise zurecht kommt, der kann $\frac{6}{8}$ oder $\frac{3}{4}$ mit $\frac{314}{100}$ multipliciren; und alsdann dieses Product mit 56$\frac{36}{100}$. Der Erfolg wird ebenderselbe seyn. Die Verwandlung des Cubik-Maases in Eimer und Eich-Maase geht so zu:

132,728 Cub. Schuh sind gleich

132 Cub. Sch. 727$\frac{8}{10}$ Cub. Zolle.

Nun gehen 12$\frac{1}{2}$ oder 12,5 solche Cub. Schuhe auf 1 Würt. Eimer. Daher muß man 12,5 in 132,7278 dividiren, und damit ergiebt sich der Quotient 10,6182 d. h. 10 Eimer und etwas über $\frac{61}{100}$ drüber; und dieser Ueberschuß beträgt 98$\frac{61}{100}$ Maase, weil 160 Maase auf 1 Eimer gehen. In völliger Ordnung steht die Rechnung ganz so:

12,5 : 132,7278 = 1 : 10,6182.
(Cub. Schuhe) (Eimer)

1 : 10,6182 = 160 : 1698,91
(Eimer) (Hell-Eich-Maaße) *)

Anmerk. Bei dieser Berechnung ist die bequeme Kreis-Verhältnis-Zahl 3,14 angewendet worden. Nimmt man die richtigere $\frac{355}{113}$ oder 3,1415926: so fällt das Produkt etwas höher aus. Nehmlich

$\frac{1}{8}$ (56,36). $\frac{355}{113}$. 6 ist = 132,795.. Cub. Schuhe.

Diese betragen 10,6236 Eimer, oder 1699,82 Maas, woraus erhellet, daß diesem Faß der Innhalt von 10 Eim. 99 $\frac{4}{5}$ Maas zukomme. Der Unterschied gegen die vorhergehende Angabe ist sehr wenig bedeutend. Er beerägt keine ganze Maas, etwa

---

*) Man kann auch mit einer einzigen Proportion auskommen, und schon in deren leztem Glied die Anzahl der Maase erhalten, wenn man folgendes erwägt: 132,7278 Cub. Schuhe sind allemal so viel als: 132727,8 Decimal-Cub. Zolle. Nun gehen 78$\frac{1}{8}$ solche Cub. Zolle (oder 78,125) auf eine Hell-Eich-Maas gesezlich (nach der K. Württemb. Maas-Ordn. v. 1806.) Man ist daher berechtigt, die Proportion zu sezzen:

78,125 : 132727,8 = wie 1 : (zu) 1698,91 . .

Wer mit Logarithmen rechnen kann, wird das lezte Glied sehr leicht finden. Wer aber Logar. scheut, oder sie nicht kennt, oder nicht eben bei der Hand hat, wird wohl thun, sich auf alle künftige Zeiten mit der Zahl 78,125 ein Einmal Eins zu fertigen (von 1... bis 9) und solches beim Dividiren immer anzuwenden.

$\frac{9}{10}$ M. Wer aber mit Logarithmen umgehen kann, wird doch immer die schärfere Kreis-Verh.-Zahl beibehalten. Allein der vielen Rechner wegen, welche dieses nicht können, hat man hier und in der Folge dieser Blätter die Zahl 3,14 aufgenommen, um für diese das Nachrechnen zu erleichtern.

§. 4.

Ausführung einer Faß-Berechnung nach einer etwas geänderten Formel.

Man findet in vielen Büchern die Vorschrift, es sei bei einem jeden vorgegebenen Faß

> ein mittlerer Cylinder-Durchmesser zu berechnen, und zwar so, daß man die Spund-Tiefe und den Boden-Durchmesser addire und die Summe halbire, oder das arithmetische Mittel zwischen beiden nehme.

Also $\frac{1}{2}$ (V+F) wird = D angenommen; für den Diameter eines Cylinders. Giebt man diesem (nun wieder, wie vorher) die Länge des Fasses zu seiner Höhe, so wird der Cubik-Innhalt dieses Cylinders nach der bekannten Regel (S. 145.)

$$\tfrac{1}{4}DD.(3{,}14).L \text{ oder hier} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{V+F}{2}\right)^2.(3{,}14).L.$$

betragen; und dieser Innhalt wird dem des Fasses gleich geachtet. Da $(\frac{1}{2})^2$ soviel als $\frac{1}{4}$ ist, und $\frac{1}{4}.\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ gilt, so kann man auch aussprechen:

$\frac{1}{16}.(V+F)^2\ 3{,}14.L$ ist ein Faß-Innhalt

allemal, allgemein ausgedrückt.

Ein nach dieser Formel berechneter Innhalt fällt jederzeit etwas kleiner aus, als der nach der vorher aufgestellten Formel: $\frac{1}{8} \cdot (VV + FF) \cdot 3{,}14 L$.

Man nehme die drei Dimensionen des vorigen Fasses auch hier wieder an: $V = 5{,}6$; $F = 5$; $L = 6$; und sezze diese Zahlen in die neue Formel ein:

$\frac{1}{16} (V + F)^2 \; 3{,}14 \cdot L$ ist nun

$= \frac{1}{16} (5{,}6 + 5)^2 \; 3{,}14 \cdot 6$ oder $\frac{1}{16} (10{,}6)^2 (3{,}14) \cdot 6$.

Das Product beträgt: 132,3039 Cub. Schuh,

da es vorher 132,7278 betragen hat.

In Eimern ausgedrückt ist dieser Innhalt = 10,5843 E. oder 1693,49 Helleich-Maas. Also 10 Eimer 93½ Maas.

Diese Berechnungs-Art mit $\frac{1}{2}(V + F)$ ist sehr allgemein in Büchern und Küfer-Vorschriften verbreitet; und ist selbst der auf den vorigen Blättern (S. 9.) gezeigten Behandlungsweise vorgezogen worden.

Aber man hat aus Erfahrung gefunden, daß bei den allermeisten Fässern der berechnete Innhalt zu klein gegen ihren wahren Gehalt ausfällt. Mehrere angestellte Proben zeigten, daß 8 bis 9 Maas auf 100 Maas zu wenig dabei herauskommen.

§. 5.

Noch eine andre Berechnungs-Art, bei welcher man ein halbes Faß als einen abgekürzten Kegel betrachtet.

Verschiedene Gelehrte suchten ehedem dieser allererst gedachten Vorstellung Eingang zu verschaffen. Wenn man sich ein Faß in der Mitte, wo die Linie der Spund-Tiefe durchgeht, zerschnitten gedenket, so ist die Helfte des Fasses wie in Fig. XVII. das Stük DAda, einem abgestumpften Kegel ziemlich ähnlich; nur daß man dabei annehmen muß, die Wölbung des Fasses Dd sei sehr gering. In Fig. XIV. in Tab. I. würde ABab ein solches halbirtes Faß vorstellen. Nach dieser Voraussezzung hat man nun die Berechnung zu führen.

Wie man einen abgestumpften Kegel (conum truncatum) berechnet, ist oben (in der Anl. zur Cub. R. S. 153.) gezeigt worden. Die Formel für den Innhalt eines Körpers, wie ABab, oder DAda ist, heißt bestimmt

$$= \frac{1}{3} . (Ii) (B + S + \sqrt[2]{B . S})$$

In Beziehung auf unsre Fig. XVII. hat man sich unter Ii hier die halbe Länge des Fasses zu denken, also $= \frac{1}{2}$ L; unter B eine Kreisfläche mit dem Diameter V, oder mit der Linie der Spund-Tiefe; also die Kr. Fläche ($\frac{1}{4}$ VV . 3,14) und unter S die Kreisfläche mit dem Diameter F, oder mit dem

Boden-Durchmesser; also die Fläche ($\frac{1}{4}$ FF . 3,14)
Diesem gemäs wird dem Innhalt des halben Fasses allgemein folgender Ausdruck zukommen:

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{L}{2}\left(\frac{VV}{4}.P+\frac{FF}{4}.P+\sqrt[2]{\frac{VV}{4}\cdot\frac{FF}{4}.P.P}\right)$$

wo P so viel als der Factor 3,14 bedeutet. Dieser Ausdruck läßt sich aber zusammenziehen in

$$\tfrac{1}{6}.\tfrac{1}{4}3,14.L.((VV+FF+V.F).$$

Bei unserm Faß, bei welchem $V=5,6$; $F=5$; $L=6$ gilt, steht die Rechnung so:

$$\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 3,14 \cdot 6\ (31,36+25+5,6 \cdot 5 \text{ ist})$$

so viel als $1 . \frac{1}{4} . 314 . (56,36 + 28)$ od. $0,785 . (84,36)$
Das Product ist 66,2226 Cub. Schuhe, welche den Innhalt des halben Fasses ausmachen.

Das Doppelte hievon ist daher

$= 132,4452$ Cub. Sch.

welche dem Innhalt des ganzen Fasses zukommen, Diesem entspricht der Betrag von 10 Eim. $95\frac{3}{10}$ M. Er beträgt nur wenig mehr, als der auf dem vorigen Blatt nach dem arithm. Mittel berechnete, welcher = 10 Eim. $93\frac{1}{2}$ M. war.

Bei Fässern, welche am Hals gewölbt sind, ist diese Formel nicht wohl anzuwenden, indem sie in diesem Fall den Innhalt allemal zu klein angibt; Ueberhaupt aber ist diese von dem abgekürzten Kegel abgeleitete Rechnungs-Weise gar nicht viel in würkliche Uebung gekommen. Indessen muß man sich dennoch des Zusammenhangs und einiger Schriften wegen, in welchen man sich auf sie bezieht, mit derselben bekannt machen.

§. 6.

Lamberts Regel, Fässer zu berechnen.

Lambert (J. H.) dieser große Meßkünstler und Analyst, (gest. 1777. zu Berlin) schlug eine neue Formel vor, nach welcher er Fässer zu berechnen anrieth, und durch welche ihr Innhalt allermeistens besser, als durch die bisher angeführte würklich gefunden worden ist. Sein Vorschlag war: Einen mittlern Cylinder-Durchmesser

$D = (\frac{2}{3} V + \frac{1}{3} F)$ zu berechnen,

das heißt: $\frac{2}{3}$tel der gemessenen Spund-Tiefe, und $\frac{1}{3}$tel des gemessenen Boden-Diameters zu addiren, und diese Summe als den Durchmesser der Grund-Fläche des Faß-Cylinders gelten zu lassen; die Höhe aber, ganz wie bei den andern Rechnungs-Arten, $= L$ zu sezzen, oder von der innern Länge des Fasses herzunehmen. Nach dieser Annahme ist also eines Fasses Cubik-Innhalt allgemein

$$= \frac{1}{4} \cdot (\frac{2}{3} V + \frac{1}{3} F)^2 \cdot 314 \cdot L; \text{ oder } \frac{(2V + F)^2}{4 \cdot 9} \cdot 3{,}14 \cdot L.$$

Dieser so berechnete Innhalt fällt jederzeit höher aus, als der nach den vorher gezeigten drei Arten berechnete. Wir nehmen wieder das Beispiel von den Zahlen des uns schon bekannten Fasses her:

$$(\frac{2}{3} V + \frac{1}{3} F) \text{ ist nun } (\frac{2}{3} \cdot 5{,}6 + \frac{1}{3} 5) = \frac{16{,}2}{3}$$

Dieser Quotient ist $= 5{,}4$. Und eben dieses ist die Größe des mittlern Cylinder-Durchmessers, welchen

wir nöthig haben = D. Der Cub. Innhalt desselben ist nun

$\frac{1}{4}$.DD.3,14.L. hier $\frac{1}{4}$(5,4).(5,4).(3,14).6.
Das Product beträgt: $\frac{1}{4}$ (29,16) . 18,84,
oder 137,3436 Cub. Schuh. Diese sind in Eimer ausgeworfen = 10,9874 E. und in Maasen
= 1757,99 M. das heißt 10 Eim. 158 Maas.
Der Innhalt dieses so berechneten Fasses fällt 63 bis 64 Maas höher aus, als der, welcher nach den zwei vorhergehenden Methoden erhalten worden. Allerdings ist dieser Unterschied nicht unbeträchtlich. Einige Gelehrte haben sich daher nach einer Vorschrift und Formel umgesehen *), welche einen Inhalt gäbe, der zwischen den nach Lambert erhaltenen, und den nach dem arithm. Mittel (oder $\frac{1}{2}$ V + F) = D) berechneten hineinfiele. Allein es läßt sich auf wenigen Blättern nicht ausführen, was darüber geschrieben worden.

---

*) Hr. Prof. Busse in Dessau hat in einem Buch, betitelt: Kenntn. der Körpermessung. Leipz. 1790. einen nicht unfein erdachten Vorschlag gemacht, dem nach dem arithmet. Mittel, ($\frac{1}{2}$.V + F) = D berechneten Faß-Innhalt, welchen er C nennt, einen Zusaz zugeben, welcher nach unsern Zeichen in der Formel enthalten wäre $+ C.\left(\frac{V - F}{3 V}\right)$. Allein man ist nicht einig worden, diesen Vorschlag anzunehmen.

Lambert ist zu der von ihm mitgetheilten Formel durch Untersuchungen über die Krümmung der Faß-Dauben, insoferne sie zirkelförmig angenommen werden, gerathen. Der Ausdruck ($\frac{2}{3}$V + $\frac{1}{3}$F) folgt aus einer großen Abkürzung von Reihen, worüber in diesen Blättern nicht umständlich gehandelt werden kann. Der Factor ($\frac{2}{3}$V + $\frac{1}{3}$F) ist nun zwar nicht ganz so bequem zu berechnen, als der gemeinübliche $\frac{1}{2}$(V + F); aber dennoch kann jeder Arithmetiker leicht damit fertig werden. Er ist so viel, als $\frac{1}{3}$(2V + F)

oder $\frac{1}{3}$tel von der Summe des Boden-Durchmessers und der doppelten Spund-Tiefe.

Dieses Drittel kann doch jeder Anfänger berechnen. Der Betrag davon wird als D gedacht, und als D als ein mittlerer Diameter behandelt, in der bekannten Cylinder-Formel ($\frac{1}{4}$.DD.3,14.L).

Weil die Erfahrung, nach vielen angestellten Proben, gezeigt hat, daß der Erfolg dieser Rechnung, d. h. die so erhaltene Innhalts-Zahl mit dem wahren Faß-Gehalt viel öfter zusammenstimme, als wenn man bei dem arithmetischen Mittel, oder bei $\frac{1}{2}$(V+F) stehen bleibt, so ist die Lambertische Vorschrift nach und nach von mehreren Praktikern, Eichern und Küfern angenommen worden.

Hier sei noch ein Beispiel angeführt, welches nach eben dieser Formel berechnet worden ist. Man nehme ein anderes Faß, als das bisher gewählte, an. In demselben sei

die Spund-Tiefe $V = 5$ Schuh 9 Zolle, oder 5,9.
der Boden-Durchmesser $F = 4$ Schuh.
Die innere Länge $L = 6\frac{1}{2}$ Schuh, oder 6,5.

Man berechne den mittlern Durchmesser, D. Er ist hier
$\frac{1}{3}(2V+F) = \frac{1}{3}.(2.(5,9)+5)$ oder $\frac{1}{3}(11,8+5)$
Das heißt D ist hier $\frac{1}{3}.(16,8)$. Also ist

$$DD = \frac{1}{9}.462,4.$$

Der Faß-Innhalt daher: $\frac{1}{4}.(\frac{1}{9}.462,4).(3,14).6,5$. Das Product beträgt 160,014 Cub. Schuhe, und diese geben etwas über $12\frac{4}{5}$ Eimer Innhalt; genauer $=$ 12,80115 Eim. oder 2048,18 Maas, das heißt, 12 Eim. $128\frac{2}{10}$ Maas.

Würde man dieses Faß nur nach der bequemen Vorschrift des arithmet. Mittels berechnen, so erhielte man einen um $108\frac{1}{4}$ Maas geringern Innhalt. Denn in diesem Fall ist $\frac{1}{2}(V+F) = \frac{1}{2}(10,9)$ oder $= 5,45$. Und alsdenn $\frac{1}{4}.(5,45)^2.(3,14).6,5$ giebt das Product 151,557 Cubik-Schuhe, welche nur 1939,93 Maas ausgeben, d. h. 12 Eim. $19\frac{9}{10}$ M.

§. 7.

Noch eine andre Regel, für merklich gewölbte Fässer, und Anwendung der Ellipsoiden-Rechnung dabei.

Lambert hat seine angeführte Formel selbst nicht für eine ganz in allen Fällen zutreffende Vorschrift ausgegeben. Es giebt Fässer, welche so gebaut sind,

daß ihr Innhalt noch höher sich beläuft, als derselbe nach der gedachten Lambertischen Formel gefunden wird. Wenn das Faß oben am Hals, (wie der technische Ausdruck lautet) nicht ausgestoßen, wenn es merklich gewölbt ist, (z. B. in der Fig. XVII von d bis D), so enthält das Faß mehr (Fluidum), als die erwähnte Rechnung ausgiebt; und in diesem Falle muß man nach einer noch andern Vorschrift auf den Innhalt ausgehen. Diese heißt: *) „Nimm eine Cylinder-Grundfläche an, welche so viel „beträgt, als $\frac{2}{3}$tel von der Fläche des Spund-Kreises und $\frac{1}{3}$tel von der Fläche des Boden-Kreises zusammen. „Diese erdichtete Cylinder-Grund-Fläche multiplicire „mit der innern Länge des Fasses (mit L). Das Product ist der Innhalt eines solchen Fasses."

Die Meinung ist also, daß man $\frac{2}{3}.(\frac{1}{4}.VV)3{,}14$
und $\frac{1}{3}.(\frac{1}{4}.FF)3{,}14$
addire, und diese Summe, als $=(\frac{1}{4}.DD.3{,}14)$ ansehe, das ist, als eine Cylinder-Grundfläche. Wenn man diese Addition wirklich vornimmt, so ist dieses eben so viel, als ob man sezte:
$\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.(2VV+FF)3{,}14$ od. $\frac{1}{12}.(2VV+FF).3{,}14$. Und diese Größe mit L multiplicirt, giebt den verlangten Innhalt.

Dieser ist also $=\frac{1}{12}.(2VV+FF).3{,}14.L.$

---

*) Siehe diese Vorschrift in Prof. Benzenbergs vollkomm. Kiefermeister. Düsseld. 1810. auf S. 54.

Man nehme das leztere Faß mit den 3 Dimensionen: $V = 5{,}9$; $F = 5$; $L = 6\frac{1}{2}$. Dessen Innhalt ist, dieser Formel gemäs:

$\frac{1}{12} \cdot (2 \cdot 34{,}81 + 25) \cdot (3{,}14) \cdot 6{,}5 = \frac{1}{12} 94{,}62 \cdot (3{,}14) \cdot 6{,}5$.
Und das Product beträgt 160,933 Cubik-Sch., welcher Zahl in Eimern und Maasen der Gehalt von 12,8743 Eim. oder von 2059,94 Maasen entspricht, d. h. von 12 Eim. $129\frac{9}{10}$ M.

Diese Berechnungs-Art ist nicht schwer, wenigstens nicht schwerer, als irgend eine der vorhin angeführten.

Aber es ist dabei noch folgendes ganz besonders zu bemerken:

Man hat, indem man diese jezt eben angeführte Regel befolgt hat, gar nichts anders gethan, als daß man damit

„ein (vorn und hinten) abgeschnittenes Ellip-
„soid, d. h. ein abgestumpftes, berechnet
„hat.“

Die Formel besteht ganz und gar aus denselben Factoren, welche in d. Anl. zur Cub. Rechn. S. 163. am Ende der beantworteten XXIXsten Frage vorgetragen worden sind. Man findet allda die Angabe:

„Der bauchichte Körper (2DCMN) in Fig. XV.
„betrage in seinem cub. Inhalt:

$$(2\,VV + FF) \cdot L \cdot \tfrac{1}{12} \cdot 3{,}14.$$

Dieses Product ist ganz gewiß eben so viel, (nur daß die Factoren anders gestellt sind), als das auf vori-

gem Blatt angeführte

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2VV + FF) \cdot 3{,}14 \cdot L.$$

Hieraus ergiebt sich nun, daß ein so gebautes, an den Dauben merklich-gewölbtes Faß als ein abgekürztes Ellipsoid berechnet werden müsse; und sich zuverläßig als ein solches jederzeit ansehen lasse.

Man wird eben hiedurch selbst auf die oben im Eingang (S. 2. dieser Blätter) ausgesprochene Erforderniß hingeführt, daß auch Kenntnisse von der Ellipse und von elliptischen Körpern, jedem nöthig seien, der sich mit Faßberechnungen beschäftigen, und gründliche Einsicht davon erhalten wolle. Freilich mag der praktische Arbeiter und Rechner sich damit zufrieden geben, wenn er nur nach einer ohne Gründe angenommenen Vorschrift gewisse Innhalte mit Zahlen mechanisch hervorbringt und darstellt. Mit welchen geometrischen Erscheinungen und Gesezzen diese Vorschriften zusammenhängen, ist ihm fremd, und bleibt ihm ganz verborgen, woferne er sich in den Vorkenntnissen der Theorie nicht umgesehen hat. Daß eine solche beschränkte Einsicht aber nicht gründlich genannt werden kann, ist doch wohl ausser Streit und recht gewiß.

§. 8.

Nähere Nachweisungen und Erläuterungen einiger hieher gehörigen Gleichungen.

Es ist auf der angeführten Seite 162. behauptet

worden, aus den gegebenen 3 Linien V, F und L lasse sich jederzeit die ganze große Axe der Ellipse selbst finden, wenn solche gleich bei dem oben vorkommenden Ellipsoid nicht unmittelbar vorhanden sei, da in diesem L die längste Linie ist, wie no in Fig. XVIII. und die große Axe AX doch jederzeit größer, als no, (oder L) augenscheinlich seyn muß. Der Ausdruck ist daselbst beigesezt, die große Axe oder

$$A \text{ sei allemal} = V . L \text{ div. d. } \sqrt[2]{(VV - FF)}$$

Der Beweis dieser Behauptung, welcher wegen Kürze des Raums (S. 162.) zurückgeblieben ist, beruht darauf:

Bei der Ordinaten-Gleichung der Ellipse hat, wenn die Abscissen (x) vom Mittelpunkt an genommen werden, (hier Fig. XVIII. von dem Punkt K an) der allgemeine Ausdruk statt:

$$yy = \tfrac{1}{4}\, cc - \frac{cc \,.\, xx}{aa}$$

wo y die senkrechte Ordinate bedeutet, a die große Axe, c die kleine. Nach unsern bisherigen Benennungen ist $y = \frac{1}{2}$ F, der halbe Boden-Durchmesser; c = V die Spund-Tiefe, und x die Helfte der innern Faßlänge, oder x ist $= \frac{1}{2}$ L, und daher

$$xx = \tfrac{1}{4} \,.\, LL.$$

Die Ordinaten-Gleichung der Ellipse wird daher jezt so heissen müssen:

$$\tfrac{1}{4}\, FF = \tfrac{1}{4} \,.\, VV - \frac{VV \,.\, \tfrac{1}{4}\, LL}{AA}$$

Man suche AA auf eine Seite allein zu bringen. Dieses wird geschehen, indem man aus den allererstgesezten Gleichung durch Folgerung die nächste sezt:

$$\tfrac{1}{4}VV - \tfrac{1}{4}FF = \frac{VV \cdot \tfrac{1}{4}LL}{AA}; \text{ alsdenn}$$

$$(\tfrac{1}{4}VV - \tfrac{1}{4}FF) \cdot AA = VV \cdot \tfrac{1}{4}LL$$

woraus $$AA = \frac{VV \cdot L \cdot L}{VV - FF}$$ folgt.

Hiemit hat man das Quadrat der großen Axe (AA) durch V, F und L allein ausgedrückt. Mit dem Quadrat erhält man die Linie der Axe selbst (unquadrirt)

A = V . L . div. durch √ (VV—FF).

Damit ist dann der Saz erwiesen!

Die angeführte Ordinaten-Gleichung der Ellipse kann hier nicht näher dargethan werden. Ihre Kenntnis wird (als Vorkenntnis) vorausgesezt aus Karstens, Vegà's, Lorenz, Trentels, Kästners, J. T. Mayers und andern Schriften über die Lehre von den Kegelschnitten. In diesen sind auch die Ausführungen über die nachstehende wichtige zwei Sääze nachzusehen:

1) daß mit der gegebenen großen und kleinen Axe einer Ellipse der Cubik-Innhalt des Ellipsoids gegeben sei. Er ist = $\tfrac{1}{6}$. VV . A (3,14).

2) daß mit denselben zwei Axen, und einem Stük der Axen-Linie, vom Scheitel an genommen, (wie An, von A aus, in Fig. XVIII.) auch allemal der körperliche Innhalt des Sphäroids (des kappenähnlichen vordern Stücks, wie ANM ist) gegeben sei.

Er ist $= \frac{1}{6}(3{,}14) \cdot \frac{VV}{AA} \cdot (An)^2 \cdot (3A - 2An)$.

Ueber die Berechnung dieser beiden Körper, des ganzen Ellipsoids und des Späroids, und über die Vergleichung derselben mit dem Cubik-Innhalt von Kugeln und Kugel-Abschnitten finden sich übrigens in der obigen Anl. zur Cub. R. von S. 158. bis S. 163. Erläuterungen über die hieher gehörigen Haupt-Gleichungen, welche immer vielen Lesern dienlich seyn dürften, denen analytische Schriften selten in die Hände kommen.

Hier mag nur noch mit Wenigem dargethan werden, wie die angeführten Formeln des ganzen Ellipsoids, des Sphäroids und des abgekürzten Ellipsoids zusammenhängen, und zusammenstimmen:

Man nehme die das Sphäroid angehende Formel zuerst, und erwäge, daß die darinn vorkommende Größe An, als Linie, wachsen könne, bis sie so lang als AK wird, (in Fig. XVIII,) das heißt $= \frac{1}{2}$ A, der halben Axe gleich. Denn An ist eine veränderliche Größe, welche bei einer jeden andern Ellipse, (so auch bei jedem andern gedichteten Faß) größer oder kleiner seyn kann. Nun sezze man für An wirklich $\frac{1}{2}$A in die Formel ein, so wird für

$$\tfrac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot \frac{VV}{AA} \cdot (An)^2 \cdot (3A - 2An)$$

eintreten: $\frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot \frac{VV}{AA} \cdot \frac{1}{4} AA \cdot (3A - A)$

Aber dieses ist, weil sich AA hebt, so viel als $\frac{1}{6} . 314 . VV . \frac{1}{4} . (2A)$ oder $(\frac{1}{12} . 3{,}14 . VV . A)$. Und eben dieses ist offenbar das halbe Ellipsoid, da dem ganzen der Ausdruck $\frac{1}{6} . 3.14 . VV . A$ bekanntlich zukommt. (S. 25 hier, und im Buch der C. R. S. 159.)

Auf eben diesen Ausdruck kommt man hinaus, wenn man die Gleichung für das abgestumpfte Ellipsoid, (oder für den elliptischen Faßkörper) wie folgt, behandelt.

Dessen Innhalt ist (nach S. 20. u. 21.)

$$= \frac{1}{12} . (2VV + FF) . 3{,}14 . L.$$

Man nehme die Helfte dieses Körpers in Gedanken an, das ist in der Figur

$$DCMN = \frac{1}{24} . (2VV + FF) . 3{,}14 . L.$$

Man schreibe dafür, was im Werth eben soviel ist

$$= \frac{1}{12} . (2VV + FF) . 3{,}14 . (\frac{1}{2} L)$$

$\frac{1}{2}L$ ist die Linie Kn augenscheinlich. Man lasse in Gedanken diese Linie Kn von n gegen den Scheitel A zunehmen, bis sie der halben Axe AK gleich werde. Das ist eben so viel, als ob man sezte:

$$\frac{1}{2}L \text{ ist } = \frac{1}{2} A \text{ geworden.}$$

Dieses kann nicht angenommen werden, ohne daß die Größe F oder die Linie NM = o würde; denn so wie $\frac{1}{2}L$ oder Kn in der Figur wächst, so nimmt die Ordinate Nn ab, und auch der untere Theil Mn zugleich; und wenn Kn in A anlangt, so ist gar kein F mehr vorhanden. Man muß also auch in der Formel die Größe FF = o sezzen, wenn man $\frac{1}{2}A$

für $\frac{1}{2}$ L einsezzen will. Es wird daher aus

$\frac{1}{12} . (2VV + FF) . 3{,}14 (\frac{1}{2}L)$ nun entstehen

$\frac{1}{12} . (2VV + 0) . 3{,}14 (\frac{1}{2} A)$

Das ist aber, weil sich 2 und $\frac{1}{2}$ heben, bestimmt so viel, als

$\frac{1}{12} . VV . A (3{,}14)$,

der Ausdruck für das halbe Ellipsoid, weil das ganze, wie gedacht, immer $\frac{1}{6} . VV . A . (3{,}14)$ ausmacht.

Auf diese Weise sieht man, wie die angeführten Formeln genau zusammen stimmen.

Anmerk. Sie stimmen auch mit den hieher gehörigen Formeln, welche man in Lamberts Visierkunst im 1sten Band seiner Beiträge S. 324. und in des H. H. Joh. Tob. Mayers Stereometrie in §. 169, oder in dem Vten Thl. seiner prakt. Geom. S. 625. findet. Für ein halbes Faß kommt in beiden, bei Annahme der elliptischen Krümmung vor: Der Innhalt desselben sei

$Z = P . k . [bb - \frac{2}{3} b . c + \frac{1}{3} cc]$; nur daß Lambert anstatt k den Buchstaben x sezt. Beede verstehen darunter die halbe innere Faßlänge, was bei mir nur $= \frac{1}{2}$ L heißt. Die Werthe von b und c werden aber gegen mein V und F in folgendem Sinn genommen: b ist bei mir $= \frac{1}{2}$ V; und $2b = V$.

c ist bei mir $= \frac{1}{2} (V - F)$, also $2 . c = V - F$;

und daher $b - c$ ist bei mir $= F$. Endlich P oder $\pi = 3{,}14$.

Man sehe auch hiebei in Fig. 80. auf Tab. VII. zu der Stereom. des H. H. Mayers gehörig. Damit deutlich erhelle, wie alles übereintreffe, so schreibe man die Säzze genau so:

Mit $Z = P \cdot k \cdot (bb - \frac{2}{3} b \cdot c + \frac{1}{3} cc)$ ist ganz gleichgeltend $P \cdot \frac{1}{3} k (3bb - 2b \cdot c + cc)$

oder $P \cdot \frac{1}{3} k ([b - c]^2 + 2 \cdot bb)$

Dafür sezze man jezt die Werthe ein, welche von mir oben angegeben worden sind:

$Z = 3{,}14 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} L \cdot (\frac{1}{4} \cdot FF + 2 \cdot \frac{1}{4} VV)$

Das ist so viel als: $3{,}14 \cdot \frac{1}{6} L \cdot \frac{1}{4} (FF + 2 \cdot VV)$

Und hiemit hat man den Werth des halben Fasses, oder, was bei mir die Benennung hat

$\frac{1}{24} \cdot 314 \cdot L \cdot (2VV + FF)$

Daher das ganze Faß als ein abgestumpftes Ellipsoid betrachtet,

$2 \cdot Z = \frac{1}{12} \cdot 3{,}14 \cdot L \cdot (2VV + FF)$

völlig so, wie oben S. 20. und S. 26. in meinen vorgelegten Säzzen.

So läßt sich auch eine ganz harmonirende Uebereinkunft der auf S. 16 und 17 von mir angeführten Formel für ganze Fässer

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot (2V + F)^2 \cdot L \cdot 3{,}14$

mit den Lambertischen und Mayerischen Formeln, für zircular-gekrümmte Fässer, nachweisen, welche so heißen:

$2 \cdot Z = 2P \cdot k (bb - \frac{2}{3} b \cdot c + \frac{1}{9} cc)$

in Lamberts Vis. Kunst. S. 326. in §. 22; und in May. Stereom. S. 645. §. 175.

§. 9.
Ueber die angestellten Versuche, durch Eich-Maas-Proben die Formeln zu prüfen und Vergleichungen anzustellen.

Die oben (S. 16.) angezeigte Regel Lamberts mit ($\frac{2}{3}$ V + $\frac{1}{3}$ F) = D ist hie und da angefochten worden, als ob sie den Innhalt der meisten oder doch vieler Fässer zu hoch angäbe; und doch wird dabei auf der andern Seite von vielen Faßkennern zugestanden, daß die, bei welcher das arithmetische Mittel mit $\frac{1}{2}$ (V + F) angewendet wird, auf einen zu kleinen Gehalt führe. Man muß bei diesem Widerstreit niemals vergessen, 1) daß die Fässer, mit welchen man Eich-Proben anstellt, keine vollkommene mathematische Körper sind, und daß wenn die Dauben auch genau gefügt zu seyn scheinen, dennoch die innern Unebenheiten des Holzes, und die verschiedenlauffenden Krümmungen an den Seitenwänden, und an den Böden immer auf Abweichungen führen müssen; 2) daß bei dem Eich-Geschäft, das Eingiessen oder Einschütten beinahe niemals auf eine gleichförmige Weise mit der grösten Regelmäsigkeit von statten gehe, 3) daß die kleinen Gefäße, deren man sich beim Zutragen oder Einschütten dabei bedient, (die Butten, Stüzzen, Gelt-Ge-

schirre . . .) ebenfalls allermeistens nicht vollkommen genau construirt, und ganz genau den Mutter-Masen gleich seien.

Ich bin selbst seit 20 Jahren bei vielen solchen Proben gegenwärtig gewesen, und habe dabei Irrthümer und Nachlässigkeiten durch allerlei Mittel zu verhüten gesucht. Allein die Schwürigkeiten bei diesen Prüfungen sind sehr gros, und zusammengesezte Fehler machen fast alle verhoffte genaue Bestimmungen ungewiß.

Indessen trifft man doch nach und nach auf etwas, das wahrscheinlicher und gültiger ist, als andere unzusammenhängende und sich widersprechende Angaben. Und dieser Fall scheint bei der Lambertischen Formel mit ($\frac{2}{3}$ V + $\frac{1}{3}$ F) = D bei zirculären Fässern wirklich statt zu finden. Sehr viele Proben, beinahe in allen Städten von Deutschland, in welchen man nur solche Prüfungs-Versuche angestellt hat, reden ihr gleichsam das Wort. Aber einige müssen (nach Lamberts eigenen Aeusserungen) auch dagegensprechen. Der verschiedene Bau der Fässer läßt solches gar nichts anders erwarten. Auch sehe man nur die Reihe der bestimmt aufgeführten Eich-Proben nach, welche sich in dem Leipz. Magazin 1786. in den Schriften des Herrn Prof. Johann Leonh. Späth (ehedem zu Altdorf) Benzenberg, Busse . . . und in vielen andern vorfinden. Ich habe diese oft und viel verglichen. Man muß wohl zufrieden seyn, wenn der berechnete Innhalt von dem Er-

fund nach der wirklichen Abeichung sich nur auf eine Verschiedenheit von 3 oder 4 Maasen bei 200 Maasen beschränkt. Die Abweichungen für das Mehr oder Weniger lauffen sehr schwankend hin und her.*)

Bei sehr bedeutend am Hals gewölbten Fässern führen beinahe alle angeführten Formeln auf einen zu niedrigen Gehalt.

Es ist deshalb durchaus nothwendig, daß man die Art der Fässer aufmerksam ansehe, oder vielmehr ihren Bau, besonders ihre Wölbung und ihre Grundverhältnisse im Innern wohl in Betracht nehme, wenn man über die Anwendbarkeit der einen oder der andern Formel ein Urtheil aussprechen will.

§. 10.

Nachhülfe, um den berechneten Faß-Innhalt durch Correctionen zu verbessern.

Der Bau der Fässer, zumal grösserer, erfordert, daß den Faßböden eine Vertiefung, (man nennt

---

*) Es lassen sich nicht alle Ursachen hievon hier ausführen. Das alte Faß ist nicht, wie das neue. Neu angelegte Reiffe ändern die Spannung und den Innhalt. Auch der an der innern Fläche sich ansezzende Weinstein ändert die Spund-Tiefe, und innere Länge. Noch andre Berücksichtigungen werden auf den folgenden Blättern vorkommen.

sie Senkung) gegeben werde, weil die Dauben dadurch fester in der Spannung stehen. Diese Senkungen an beiden Seiten vermindern den Innhalt der Fässer. Die bisher gezeigten Berechnungen sezzen nur senkrecht stehende Böden voraus. Sind daher Boden-Senkungen von einiger Bedeutung vorhanden, so muß man eine Nachrechnung führen. Man muß den Innhalt dieser Vertiefung in Cubik-Zollen bestimmen. Dieses geschieht, indem man sie als einen (kleinen) Kugel-Abschnitt, oder als ein Sphäroid eines elliptischen oder parabolischen Körpers berechnet. Da aber bei den gedachten Senkungen zusammengesezte Krümmungen vorkommen, so theilen sich die Gelehrten sehr in ihren Vorschlägen, den Calkul zu führen. Jeder der sehr geschikten Mathematiker, J. L. Späth, J. T. Mayer und Benzenberg, rechnet anders. Für die Mehrzahl der Geometer dient wohl immerhin folgende Vorschrift:

„Man messe die Tiefe in der Mitte der Senkung „mit einem Zollstab, und sehe diese Linie als die „Höhe von einem Kugelabschnitt an; den Diameter „des Faßbodens aber als den Durchmesser des Ku„gelschnitts, (als eine Sehne). Nun berechne man „den Cub. Innhalt des Kugel-Abschnitts; werfe aber „von dem Betrag der gefundenen Cubik-Zolle $\frac{1}{5}$tel „weg."

Nennt man die Höhe der Senkung in der Mitte $= x$ (in Zollen oder Linien ausgesprochen); den halben Boden-Durchmesser $\frac{1}{2}$ F jezt $= y$, so ist die

Formel *) für den

Inh. des K. Abschn. $=\frac{1}{2}\left(\frac{yy}{x}+\frac{1}{3}x\right).xx.3,14.$

Dieser Innhalt ist allemal zugros für den Innhalt der Senkung. Darum nehme man $\frac{1}{5}$tel des erhaltenen Produkts und ziehe es von dem schon vorhandenen Betrag ab; der Rest heiße S. Er ist doppelt zu nehmen, wegen der 2 Faßböden. Der berechnete Innhalt des ganzen Fasses ist also um 2.S zu vermindern.

Ein Beispiel in Zahlen ist folgendes: Die Tiefe der Senkung sei 2 Zoll; also $x = 2$; der Boden-Durchmesser $F = 5$ Schuh, oder 50 Zoll; also $\frac{1}{2}F$ oder hier $y = 25$.

Der Innhalt des KugelAbschnitts wird seyn:
$=\frac{1}{2}(625.\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.2).4.3,14.$ oder $(313\frac{1}{6})\frac{4}{2}.3,14.$
Das Product ist: 1966,68. Cubik-Zolle; welche 25,1735 Maase ausmachen. Diese sind für die Sen-

*) Man findet diese Formel in mehreren Schriften; auch in meinen Belehr. für Geom. (herausg. Stuttg. 1813.) auf S. 106. bis 109. wo solche noch mit 2 andern Vorschriften, KugelAbschnitte zu berechnen, verglichen wird. Sie ist in dem gegenwärtigen Fall den andern vorzuziehen, weil man blos x und y (oder $\frac{1}{2}$ F) dabei anwendet, und nicht erst den Durchmesser der ganzen (hier gedichtet angenommenen) Kugel besonders berechnet. Die Formel mit Anwendung des Kugel-Durchmessers steht oben in der Anleit. zur Cubik-R. S. 157. 158.

kung zuviel. Man ziehe $\frac{1}{5}$ ab; so bleiben 20,138 Maas = S.

Ein zweytes Beispiel: Die Senkung betrage nur $1\frac{1}{2}$ Zoll, also $x = 1,5$; $y = 25$ (wie vorher). Da wird der Innh. des Kugel-Abschnitts:

$$\tfrac{1}{2} \cdot (416,66 + 0,5) \cdot 2,25 \cdot 3,14.$$

Das Product ist = 1470,11 Cub. Zolle. Diese machen 18,8174 Maase; und wenn $\frac{1}{5}$tel weggeworfen wird, 15,054 Maase, oder $15\frac{1}{20}$ M.

Wählt man eine andre Rechnungs-Weise, so wird man 2 oder 3 Maase mehr oder weniger herausbringen. Darüber läßt sich bei einem 10 Eimer haltenden Faß nicht streiten. — — Immer ist das, was herauskommt, nur in Näherung gültig, und bleibt Ungewißheiten unterworfen.

Aber noch ist mit den Boden-Senkungen auch die Linie der innern Länge L zu ändern. Diese Linie wird nun kleiner; sie heiße L^{I}. Oben zunächst unter dem Spunde ist noch L vorhanden. Man muß nun das arithmetische Mittel zwischen L^{I} und L nehmen, oder $= \frac{1}{2}(L^{I} + L)$ als die wahre jezt statt habende Länge des Fasses *) setzen.

---

*) Hieher gehört auch noch die gehörige Bestimmung des Faßboden-Durchmessers F, wenn man dessen Länge von aussen am Faß mißt. Man muß dabei jederzeit eine gewisse Holzdikke in Abzug nehmen.

Auf diese Correctionen wird meistens bei Faßberechnungen nicht Rücksicht genommen. Bei großen Fässern sind sie aber nicht ausser Acht zu lassen.

Sie vermehren die Ungewißheit bei den Vergleichungen, welche S. 30 angeführt worden. Denn man weiß meistens nicht, ob sie bei den Versuchen, welche erzählt werden, und welche man dem Erfolg der Berechnungen an die Seite zu stellen pflegt, gehörig beachtet worden seien.

§. 11.

Einleitung in die Lehre von cubischen Visier-Stäben.

Bei allen bisher berechneten Fässern ist vorausgesezt worden, daß die Spund-Tiefe, der Boden-Durchmesser, und die innre Länge des Fasses wesentliche Stükke der Innhalts-Rechnung eines Fasses seien, und daß man also die Linien V, F, L unmittelbar gemessen haben, und als Längen in Schuh und Zollen kennen müsse, um das volle Faß in Cubik-Schuh, Cub. Zollen ... zu erhalten. Diese Messung der drei Faß-Dimensionen findet man in Praxi für beschwerlich, und man zieht die Faß-Ausmessung mit einem cubischen Visier-Stab vor. Eine dünne hölzerne Stange oder Ruthe, welche mit grossen Einschnitten, oder Abtheilungen und beigefügten Zahlen versehen ist, wird vom Spundloch bis an das Ende des Boden-Durchmes-

sers quer eingestosen, (von D bis M in der Fig. XV.) und alsdenn wird die aufgezeichnete Zahl nachgesehen, welche bei der Länge MD statt hat, und nach derselben ausgesprochen: „So viel Eimer oder Maase hält das Faß!"

Das Verfahren ist sehr etnfach; und die Bemühung allerdings nicht gros; mit einer gemessenen Querlinie ist alles abgethan!

Es muß erklärt werden, wie ein einziger künstlich bezeichneter Stab dieses leisten könne! Die Sache kommt darauf an e

Es ist ein ausgemacht-wahrer geometrischer, oder genauer gesagt, stereometrischer Saz, daß alle ähnliche reguläre Körper sich in ihrem Innhalt gegen einander verhalten, wie die Würfel (Cubi) ähnlich liegender Linien in ihnen. Also in Fig. XV. wenn dem Faß MNOF mit der QuerLinie MD ein ähnlich construirtes kleineres oder größeres an die Seite gestellt, und M′N′O′F′ genannt würde, mit der Querlinie M′D′, so würden die 2 Innhalte dieser Faß-Körper sich verhalten, wie die Cubi der Linien MD und M′D′, oder die Proportion hätte statt:

$$MNOF : M'N'O'F' = (MD)^3 : (M'D')^3$$

Man schreibe, der Kürze halben, T und t für die 2 Inhalte; M und m für die Querlinien. Also gilt

$$T : t = M^3 : m^3.$$

Eine leichte Folgerung aus diesem Saz ist aber, daß

man auch aussprechen darf: Wenn die 2 Innhalte gegebene Zahlen sind, so verhalten sich deren Cubik-Wurzeln, wie die Linien MD und M'D', oder wie die Zahlen M und m selbst. Allgemein

$$\sqrt[3]{T} \ : \ \sqrt[3]{t} = M : m$$

Beispiel in Zahlen: Ein kleines Faß halte 216 Maas; und die Querlinie in demselben MD sei = 30 Zoll lang; welches durch unmittelbares Messen bekannt sei; Ein noch kleineres Fäßchen halte nur 64 Maas; Wie lang wird die Querlinie in diesem seyn, wenn es ähnlich gebaut ist? Antw. 20 Zoll lang. Denn die Sätze sind

$$216 : 64 = (30)^3 : m^3$$

Also die Cub. Wurzeln dieser Zahlen:

$$6 : 4 = 30 : m$$

Das lezte Glied ist = 20; und das sind Zolle im Längenmaas. So bequem werden aber, wenn für T und t andre Zahlen eintreten, die Rechnungen selten ausfallen.

Gesezt, das kleinere Faß hielte 160; das größere, wie vorher 216, so werden die Sätze so stehen:

$$216 : 160 = (30)^3 : m^3$$

$$6 : 5{,}32883.. = 30 : m$$

Das 2te Glied (der 2ten Proportion) ist die Cubik-Wurzel aus 160; Sie ist in Näherung hinlänglich-genau 5,42883. Das 4te Glied, m, ist hier = 27,14417 Zolle.

Diese Länge wäre nun in diesem Fall die Visier-

Linie für einen Würtemb. Eimer, insoferne derselbe 160 Maas hält. Linien wie ML, oder MD, nennt man Faß-Visirlinien.

Man wende die Glieder der Proportion um, so, daß das 3te das 1ste werde; so wird dann gelten:

30 : 27,1441 = 6 : 5,42883.

Dabei wird man den Gedanken fest halten können: Die 3 ersten Glieder sind gegeben; also auch das 4te Glied, (5,4288...). Mit dieser Zahl ist aber auch ihr Cubus gegeben, welcher (wie gedacht) = 160 ist.

Daraus folgt, wenn in dem einen Faß die Visirlinie auf 30 weist, (auf 30 Zoll in Länge) und in dem andern auf 27,144... oder auf 27 Zoll $1\frac{4}{10}$ Lin. so sind

in dem einen Faß 216 Maas,
in dem anden 160 Maas vorhanden.

Man nehme jezt in das 2te Glied das doppelte von 27,1441 auf, und sezze also

30 : 54,2883 = 6 : 10,8576.

Der Cubus der lezten Zahl (im 4ten Glied) ist 1280 oder = (8.160). Das sind 8mal 160 Maas, oder acht Würtemb. Eimer.

Nimmt man daher einen langen Stab, mißt von unten herauf zuerst 27,144 Zoll, und bezeichnet die Stelle des Stabs, wo 27 Zoll 1 $\frac{4}{10}$ Linie eintrifft, mit einem Strich (einer Marke) und mit der Bemerkung: 1 Eimer; und das Ende der doppelten Länge,

oder wo 54 Zoll $2\frac{8}{10}$ Lin. eintraf, abermals mit einer Marke, und mit der Bemerkung: 8 Eimer; so hat man schon 2 markirte Stellen auf einer Visirruthe. Fragt man nun nach einer dritten Stelle, wo 7 Eimer aufgezeichnet werden muß, so wird man diese Stelle oder diesen Punkt mittelst Ausrechnung folgender Proportion finden:

$$1 : \sqrt[3]{7} = \text{(wie)}\ 27{,}1441 : 51{,}9249$$

Nehmlich so wie der Schluß gültig ist

$$\sqrt[3]{T} : \sqrt[3]{t} = M : m$$

$$1 : \sqrt[3]{8} = 27{,}144 : (27{,}144) \cdot \sqrt[3]{8}$$

$$\text{oder}^{*)}\ 1 : 2 = 27{,}144 \ldots : 54{,}2883$$

eben so muß gültig seyn:

$$1 : \sqrt[3]{7} = 27{,}144 \ldots : (27{,}144)\ \sqrt[3]{7}.$$

Das 4te Glied beträgt 51,9249.. weil die Cubik-Wurzel aus 7 längst schon genau berechnet = 1,9129312 ist. Siehe auch in der Anleit. zur Cub. R. S. 48.) Demnach muß da, wo die Linie von unten auf der Ruthe mit 51 Zoll $9\frac{1}{4}$ Lin. sich endiget, der Punkt mit 7 E. bezeichnet werden, d. h. 7 Eimer.

Die Bezeichnung des Punkts für 6 Eimer wird sich gleichförmig ergeben bei 49 Zoll $3\frac{1}{4}$ Lin. Denn es ist

$$1 : \sqrt[3]{6} = 27{,}144 : 49{,}3243.$$

---

*) Anfänger dürfen wohl hiebei noch daran erinnert werden, daß die Cub. Wurz. aus 1 wieder = 1 ist.

Damit hat man jezt 4 genau bezeichnete Punkte auf diesem Stab. Ganz eben so findet man die bestimmten Längen der Visir-Linien für 5, für 4, 3, 2 Eimer, Für $\frac{1}{2}$; für $\frac{1}{4}$ E. u. s. f. Die für $\frac{1}{10}$ Eimer oder für 10 Maase (was man in Würtemberg 1 Imi nennt) beträgt eben diesen Säzzen gemäs $= 10,7474$ Zolle, oder 10 Zolle 7 Lin. $4\frac{7}{10}$ Scr. (beinahe $10\frac{3}{4}$ Zoll).

Alle diese Ausrechnungen beruhen also auf dem Haupt-Saz: „Wie sich die Cubik-Wurzeln der aus„gesprochenen Innhalts-Zahlen verhalten, so verhal„ten sich die Längen der Visier-Linien."

Man stelle sich 3 ähnlich-gebaute Fässer vor mit den 3 Quer-Linien MD, M$\acute{\text{D}}$, M$\acute{\acute{\text{D}}}$. und diese hätten (genau gemessen) wirklich die Längen: 54,288; 51,924...; 49,324.. so könnte man sicher den Ausspruch thun: „Das eine hält 8 Eimer; das andre 7; das dritte 6. Die Visier-Linie *) aber für ein volles

---

(*) Man pflegt bei einer jeden Visier-Ruthe von ihrer Grundlage zu sprechen. Diese Grundlage ist eine auf der Ruthe gemessene Linie, welche entweder mit der Visierlinie für 1 Eimer, oder mit der für 10 Maas übereinkommt. Man zieht die kleinere Line gewöhnlich vor; also hier die für 10 Maas; oder, was eben so viel im Würtembergischen ist, für 1 Imi. Ist diese Linie gehörig genau auf der Ruthe, oder Visier-Stange (von unten herauf) aufgetragen, und

kleines Fäßchen von 10 Maas wird 10¾ Zoll betragen; — immer in der Voraussezzung, daß die für 1 Eimer 27,1441.. Zoll lang sei.

Hiemit ist sattsam erläutert, in wie ferne vermittelst eines einzigen Stabs, und mittelst einer Operation, die Innhalte mehrerer Fässer angegeben werden können. Die wesentliche Voraussezzung ist hiebei durchaus: „Die Fässer müssen alle unter sich ähnlich, sie müssen gleichförmig, nach einerlei Verhältnissen gebaut (construirt) seyn. Es fragt sich nun, wie wird diese Aehnlichkeit erkannt? worauf beruht sie?

---

ihr End-Punkt mit einem Strich angedeutet; so entspricht die doppelte Länge dieser Grundlage dem Betrag von 80 Maas, oder von 8 Imi; die 3fache Länge dem von 270 Maas, oder 27 Imi, und so fort.

Damit wird einleuchtend, daß man die Genauigkeit der auf jedem Cub. Visierstab befindlichen Bezeichnung eben dadurch, daß man der Grundlage gewiß ist, prüfen, und eben diese Bezeichnungen, wenn sie etwa nicht genau, oder ganz unrichtig seyn sollten, darnach verbessern könne.

§. 12.

Erläuterungen von Kunst-Ausdrücken; und was das Grund-Verhältniß und die Wölbung der Fässer eines Geschlechts seien.

Man merke sich folgende Vorstellungen und Ausdrücke aus der Kunst-Sprache des Faßbaus; 1) Die Vergleichung zwischen dem Boden-Durchmesser und der innern Länge des Fasses wird das Fundamental-Verhältniß (Grund-Verhältniß) des Fasses genannt $= \frac{F}{L}$; in unserm obigen Beispiel (S. 19.) ist 5 : 6,5 oder $\frac{10}{13}$ das Fundam. Verhältniß des angenommenen Fasses. 2) Man vergleicht ferner die Differenz V — F mit derselben innern Länge L, und der Quotient: L dividirt durch V — F wird die Wölbung oder Spizung des Fasses genannt; Die Differenz V — F aber der Faß-Stich. In unserm obigen Beyspiel ist (5,9 — 5) oder 0,9 der Faß-Stich, oder $\frac{9}{10}$ Schuh, d. h. 9 Zoll. Die Wölbung aber wird durch den Quotient (6,5 : 0,9) oder $\frac{65}{9}$ bestimmt, *) weil L = 6,5 oder $6\frac{1}{2}$ Sch. gegol-

---

(*) Man erkennt ohne viele Anstrengung, daß, wenn die Spund-Tiefe V von dem Bodendurchmesser F bei einem Faß weniger unterschieden ist, als bei einem andern darneben liegenden, welches doch gleiche Länge mit dem erstern hätte, der Faß-Stich des erstern, als Zahl betrachtet, (oder V — F, als Zahl ausge-

ten hat. Die Division giebt $7\frac{2}{9}$; und man pflegt nun den Ausspruch zu thun: „das Faß ist auf $7\frac{2}{9}$ Stiche gefügt." — Den angehängten Bruch $\frac{2}{9}$ läßt man gewöhnlich weg, und spricht nur die Anzahl der ganzen Stiche aus, (hier 7).

Wenn zweien ungleich großen Fässern (nach ihrem innern Bau) ebendasselbe GrundVerhältniß $\frac{F}{L}$, und

---

sprochen), öfter in der Länge, L, liegen müsse, als bei dem 2ten Faß seyn kann. Denn, wenn z. B. V—F = 9 Zoll beträgt bei dem erstern Faß; und bei dem 2ten 10 Zolle, die Länge des Fasses aber beidemal 6 Schuh oder 60 Zolle, so sind doch gewiß 9 öfter in 60 enthalten als in 10; weil $\frac{1}{9}\,60 = 6\frac{2}{3}$ beträgt; aber $\frac{1}{10}\cdot 60 = 6$ ist. Der Quotient $\frac{L}{V-F}$ ist also bei dem 2ten Faß kleiner. Dadurch wird aber auch die Gröse der Wölbung bestimmt; und diese ist eben bei dem 2ten Faß gröser. Je mehr man die Linie V—F auf die Linie L gleichsam umschlagen kann, (wie der übliche Ausdruck hiebei ist), desto kleiner ist die Wölbung. Es treten also hiebei umgekehrte Verhältnisse ein. Man vergleicht auch die Größe des Faß-Stichs V—F mit der Spund-Tiefe V, und bestimmt darnach die sogenannte Stich-Zahl. Diese Lehre kann aber hier nicht genauer ausgeführt werden. Das nähere findet man in Hrn. Prof. J. L. Späths Abh. von Fässern; in dem theor. Th. S. 13. 19; in dem prakt. S. 32; in Hrn. Hof. R. Mayers Stereom. S. 613 u. Hrn. P. Benzenbergs Visiermst. S. 39—42.

ebendieselbe Wölbung zugehöret $\left(\frac{L}{V-F}\right)$, so gehören sie zu einem Faß-Geschlecht, und werden ähnlich genannt. Dieses ist ein Haupt-Saz in dieser Lehre. Ihre Visierlinien werden sich also auch verhalten, wie die Cub. Wurzeln ihrer Innhalte, welches ganz mit den Säzzen des vorigen Blatts stimmt, und dem Vortrag darinn gemäs ist.

Beispiel in Zahlen: Einem Faß sollen folgende 3 Dimensionen zukommen: V = 4 Schuh $9\frac{1}{6}$ Zoll oder 4,9166 Schuh, = $\frac{5}{6}$. (5,9) Schuh; F sei = 4 Schuh $1\frac{2}{3}$ Zoll oder 4,166..; und L = 5 Schuh $4\frac{1}{6}$ Zoll, oder 5,4166 Sch. Das Fundamental-Verhältniß dieses Fasses (F : L) ist = (10:13), wie bei dem vorigen Faß. Denn F = 4,166 ist = $\frac{5}{6}$. (5); und L = 5,466 ist = $\frac{5}{6}$. (6,5). Daher $\frac{F}{L} = \frac{5}{6,5}$ oder $\frac{10}{13}$.

Ferner ist die Wölbung (L:[V—F]) hier (5,4166) : (0,75) weil V — F = 4,9166 — 4,1666 soviel, als 0,75 beträgt. Der Quotient ist = 7,222 oder $7\frac{2}{9}$ Schuh; ganz, wie der vorige (auf S. 43.)

Diese Fässer können daher, eben weil sie ähnlich sind, mit einem und demselben cubischen Visir-Stab gemessen werden. Die Visier-Linie in dem ersten größern, (in welchem V = 5,9; F = 5; L = 6,5 war), beträgt 63 Zolle $4\frac{1}{2}$ Lin. oder genauer 63,4547 Zolle; die Visier-Linie in dem kleinern, erst

hier aufgeführten, beträgt $52\frac{7}{8}$ Zoll (genauer 52,8789 Z.) Dieses muß noch näher erläutert werden.

§. 13.

Belehrung, wie man die zu einem Faß gehörige Visier-Linien geometrisch finde.

Man sehe in Fig. XV. die Quer-Linie MD an; und DH mit MH dazu: MD ist jederzeit die Qu. Wurz. aus $(DH^2 + MH^2)$. Die Linie DH ist durch V und F gegeben, und ist $= \frac{1}{2}(V+F)$ jedesmal (*); MH aber ist $= \frac{1}{2}$ L. Die Summe der Quadrate wird $= \frac{1}{4}.(V+F)^2 + \frac{1}{4}.LL$ seyn. Und die Qu. Wurzel daraus $\frac{1}{2}.\sqrt[2]{([V+F]^2 + LL)} = MD$. Hieraus wird einleuchtend, daß die geometrische Bestimmung der Visier-Linie MD jederzeit die Kenntniß der 3 Faß-Dimensionen voraussezze, V, F und L.

(*) Beweis dieser Behauptung: DH ist $=$ DI $+$ IH, der Figur gemäs; d. h. $=$ DI $+$ F; Aber DI $+$ HC ist $=$ V $-$ F; eben so viel ist 2 DI, weil DI so lang als HC ist; daher DI $= \frac{1}{2}$ (V $-$ F). Deshalb ist gewiß $DI + F = \left(\frac{V-F}{2} + F\right)$ oder $\left(\frac{V-F+2F}{2}\right)$ das ist: $\frac{V+F}{2}$ ist (DI $+$ F) gleich; also $=$ DH.

Gehen wir nun zu den Zahlen-Beispielen über. Bei dem ersten ist $(V+F) = (5{,}9 + 5) = 10{,}9$; und $L = 6{,}5$. Also muß

$$MD = \frac{1}{2} \sqrt{([10{,}9]^2 + [6{,}5]^2)}$$

betragen. Die Größen unter dem Wurz. Zeichen sind $(118{,}81 + 42{,}25)$ oder $161{,}06$; und deshalb

$MD = \frac{1}{2} . \sqrt[2]{161{,}06}$, ausgerechnet $= 6{,}34547$ Sch. oder in Zollen (welchen Ausdruck man nachher braucht) $= 63{,}4547$ Z.

Der Innhalt dieses Fasses ist (nach der Berechnung S. 19.) $= 12{,}80116$ Eim. Die Visier-Linie hiezu weiß man mit dieser Zahl. Nun suche man die für ein ähnliches kleines Faß von 1 Eimer. Sie wird $= 27{,}1257$ Zoll betragen. Denn man wird (nach den Sätzen S. 37.) den Schluß bilden:

$$\sqrt[3]{12{,}80116} : \sqrt[3]{1} = 63{,}4547 : 27{,}1257,$$

oder $2{,}33928 : 1 = 63{,}4547 : 27{,}1257$.

Die Visier-L. für ein Faß von 1 Eim. das ähnlich construirt wäre, beträgt also $27\frac{1}{8}$ Zoll, oder 27 Zoll $1\frac{1}{4}$ Lin. beinahe ganz scharf. Die Visier-Linie für ein Gefäß von 10 M. oder für 1 Imi folgt daraus $= 10{,}7645$ Zoll.

Jezt berechne man auf gleichförmige Weise die Visier-Linie für das 2te Faß, in welchem $V = 4{,}9166$ gilt, oder $\frac{1}{6}(29{,}5)$; $F = \frac{1}{6}.(25)$; $L = \frac{1}{6}.(32{,}5)$. Es wird sich daraus ergeben

$MD = 5{,}28789$ Schuhe oder $52{,}8789$ Zolle.

Der Faß-Innhalt (nach Lamberts Formel alles aus-

geführt) fällt auf 92,6009 Cub. Schuh; oder auf 7,40807 Eimer. Zu diesem Innhalt gehört, wie gedacht, die Visier-Linie MD = 52,8789 Z.

Nun frage man wieder nach der für ein ähnlich gebautes Fäßchen von 1 Eimer. Es findet sich für sie ganz die vorige Zahl = 27,1257 Zoll, wenn man die Cub. Wurzel aus der Innhalts-Zahl der Eimer, aus 7,40807, zieht *), (diese ist = 1,949404) und die Schluß-Proportion alsdann so aufgestellt:

1,949404 : 1 = 52,8789 : 27,1257.

So bestätigt dieser Rechnungs-Erfolg die behauptete Aehnlichkeit der gedachten zwei Fässer vollkommen!

Eine von dieser Visir-Linie verschiedene Größe für 1 Eimer findet man aber, wenn man ein Faß, wie

---

(*) Man wird bei der Ausführung dieser Rechnung ohne Logarithmen kaum glücklich von Statten kommen; obgleich einige Werthe in den Zalen einfach genug ausfallen; z. B. (2 V + F) ist = $\frac{1}{6}$. 84 oder 14, wodurch der Innhalt des Fasses sich auch ohne Logar. leicht finden läßt. Allein die specielle Berechnung nach Lamberts Formel kann hier selbst umgangen werden. Man nehme nur den Innhalt des vorigen Fasses = 12,80116 Eim. und multiplicire mit $\frac{125}{216}$, als dem Cubus von $\frac{5}{6}$; so erhält man den Innhalt für das kleinere Faß: 7,4087 Eimer. Die Visierlinie aber für dieses Faß erhält man, wenn man die schon bekannte des größern ähnlichen Fasses nimmt: 63,4547 Zoll, und sie mit $\frac{5}{6}$ multiplicirt. Das Produkt ist = 52,8789 Zoll.

das in den allerersten Beispielen angenommene vor sich nimmt, bei welchem $V=5{,}6$; $F=5$; $L=6$ gegolten hat (S. 9 .. S. 16.). Diesem Faß kommt das Grund-Verhältniß $\frac{F}{L}=\frac{5}{6}$ zu; der Faß-Stich $V-F$ beträgt 0,6 oder $\frac{6}{10}$; und er liegt in der Länge des Fasses 10mal. Denn $\frac{L}{V-F}$ ist $=\frac{6}{0{,}6}$ oder 10. Das Faß ist also auf 10 Stiche gefügt. Es gehört demnach in ein ganz anderes Geschlecht von Fässern, als das auf den nächstvorhergehenden Blättern betrachtete, welchem das Grund-Verhältniß $=\frac{10}{13}$ und die Spizzung oder Wölbungs-Zahl $7\frac{2}{9}$ zukam, oder welches auf $7\frac{2}{9}$ Stiche gefügt war. Es ist diesem deshalb auch gar nicht ähnlich, und es kann daher auch der cubische Visier-Stab, welcher für dieses erwiesen worden, nicht angewendet werden.

Der Innhalt des gedachten Fasses ist, nach Lamberts Formel berechnet, = 10,9874 Eim. (S. 16.) Man suche MD die Visier-Linie. Man wird sie = 6,09015 Schuh, oder 60,9015 Zoll für diesen Innhalt finden, als $=+\frac{1}{2}\sqrt[2]{(148{,}36)}$. Und nun suche man die Visier-Linie für 1 Eimer. Sie wird sich darstellen, als 27,3944 Zoll. Denn es ist hier

$$\sqrt[3]{(10{,}9874)} : \sqrt[3]{1} = 60{,}9015 : 27{,}3944$$
$$\text{oder } 2{,}22315 : 1 = 60{,}9015 : 27{,}3944$$

(Alles nach den Säzzen S. 39 und 44 ausgeführt.) Die Visier-Linie für 1 Eimer (oder, bestimmter aus-

gedrückt, für 1 Eimer Faß, das dem größern von $10\frac{8}{10}$ Eimer ähnlich wäre), ist länger, als die für das unähnliche Eimer-Faß berechnete, welche als = 27,1257. (S. 46) dargethan worden. Die Visier-Linie für Fäßchen von 10 Maas, (oder 1 Imi) würde = 10,871 Zoll betragen. Es wird daher eine ganz andre Visier-Ruthe, mit einer ganz andern Grundlage, (mit andern Einschnitten und Marken versehen) gefertigt werden müssen, um Fässer dieses Geschlechts zu visiren.

Bei der oben nur arithmetisch berechneten, nicht geometrisch deducirten Visier-Linie für 1 Eimer, mit 27,1441.. angegeben, (S. 39.) hat man sich ein Faß mit den drei Dimensionen: V=5,9: F=5; L=6,44 zu denken, dessen Innhalt sich auf 12,6829 Eim. oder 12 Eim. $109\frac{1}{8}$ Maas beläuft. (Wer nachrechnet, nach der nun genug gezeigten Verfahrungs-Art, wird dieses gewiß so finden.) Dieses Faß gehört zu keinem der zwei vorhergehenden Faßgeschlechter. Denn sein Grund-Verhältniß (F:L) ist (5:6,44) oder 0,77639; welche Zahl weder mit 0,6, noch mit 0,76923, (als dem Werth von $\frac{10}{13}$) übereinkommt; und die Wölbungs-Anzeige, oder Anzahl der Stiche, (L:V—F) (6,44:09) oder 7,155.. stimmt ebenfalls nicht mit den angeführten (10 und 7,222). Doch ist nicht zu mißkennen, daß die Visier-Ruthe für dieses Faß von der für das S. 44..47.) betrachtete Faß, bei welchem V=5,9; F=5;

$L = 6,5$ gegolten hat, nicht viel verschieden seyn könne.

§. 14.

Anzeige einiger unstatthaften Anwendungen des cubischen Visier-Stabs.

Es erhellet aus den bisherigen Vorträgen zur Genüge, 1) daß man nicht beurtheilen könne, ob ein cubischer Visier-Staab zu 2 oder 3 eben vorhandenen ungleich großen Fässern passe, und rechtlich zu ihnen gehöre, ohne daß man die 3 Dimensionen dieser Fässer kenne, und die Prüfung und Rechnung darnach vornähme; 2) daß diese Bemühung nur in dem bestimmten Fall unterbleiben könnte, wenn man gewiß wüßte, die vorhandenen Fässer seien ganz noch einem Fundamental-Verhältniß, und nach einer Spizzung oder Wölbung gebaut. Bei jedem Anstand und Zweifel darüber muß man aber doch immer wieder auf die 3 Faß-Dimensionen zurückgehen. —

Vor 50 und mehr Jahren wurde in den meisten Provinzen Deutschlands auf gewisse Büttner- (Küfer) und Eich-Ordnungen gehalten, vermöge welcher die Fässer nach einem bestimmten Fundamental-Verhältniß und nach bestimmter Spizzung construirt werden sollten. Besonders hielt man bei sogenannten Meister-Stükken strenge auf eben hierauf gehende Vorschriften, oder bezog sich dabei auf die Ordnungen gewisser Hauptstädte, wie Augsburg und Cöln.

Aber in neuern Zeiten hat man beinahe allen bindenden Regeln entsagt, und sie als einen lästigen Zwang (meistens ökonomischer Rücksichten wegen) verworfen. Man gestattet es, Fässer von allen *) Geschlechtern und willkührlichen Grund-Verhältnissen zu bauen. Und dennoch bedient man sich noch oft in großen Städten und Provinzen eines und eben desselben althergebrachten cubischen Visier-Stabs, und hält denselben für viele ganz unähnliche Fässer für gültig — — **)

Eine andre unrichtige Anwenduug der cubischen Visier-Stäbe besteht darinn, daß man sie oft gebrauchen zu dürfen glaubt, um den Innhalt nichtvoller Fässer durch die Striche und Zahlen, die auf dem Stab stehen, zu erfahren. Allein die Weinnässe auf dem Querstaabe bei einem nicht vollen

*) So viel ist zwar kundbar, daß man sich auf die Anzahl der Stiche von 6 bis 15, oder 7 bis 15 in mehreren Distrikten Deutschlands beschränkt. Allein mit dieser Beschränkung wird die obige Behauptung gar nicht widerlegt.

**) Ich habe darüber viele Erkundigungen seit 30 Jahren schon eingezogen, und viel darüber correspondirt. Am Rhein, am Mayn, an der Oder und Donau, beinahe überall findet große Unordnung statt. Hr. Prof. Benzenberg hat dieses ebenfalls bemerkt. Manche Gelehrte schweigen darüber, nur um sich Verdruß zu ersparen.

Faß zeigt niemals den wahren Gehalt des noch als Rest vorhandenen Vorraths an. Dieser Gehalt wird auf eine ganz andre Weise, mittelst einer ganz andern Rechnung, welche unten noch auf einigen Blättern gelehrt werden soll, erhalten. Auch muß man dabei die Weintiefe durch einen senkrechten Stab aufnehmen: Die Anwendung des oben von S. 35 bis S. 41 betrachteten cub. Querstabs geht immer nur ganz volle Fässer an. Was im gemeinen Gebrauch von Küfermeistern und Eichern, mit Anwendung von Querstäben, bei nicht vollen Fässern geleistet wird, beruht auf speciellen Erfahrungen von den einzelnen ihnen bekannten Fässern, und besteht nur in Näherung in besondern Fällen — — Geometrische Prüfungen mit Rechnungen darüber anzustellen, — dieses Geschäfts hat man sich bisher enthalten. Die Ursache wird sich unten aus §. 17. recht gut einsehen lassen.

§. 15.

Ueber die Berechnung der Oval-Fässer.

Alles, was bisher gelehrt worden, geht reguläre runde Fässer an, bei welchen die Fläche durch die Spund-Tiefe, und die durch den Boden-Diameter Kreise sind. Man nennt sie Zirkular-Fässer, und begreift auch die Fässer unter dieser Benennung, welche abgekürzte Ellipsoiden sind; (wie die oben S. 21..25 betrachteten). Denn auch bei diesen sind die angeführten zwei Schnitte wirkliche Kreise,

(Zirkel), und alle parallele Schnitte, durch das ganze so gebaute Faß geführt, sind ebenfalls Kreise. Von diesen Fässern sind die Oval-Fässer sehr verschieden.

Bei denselben ist der Schnitt, durch die Spund-Tiefe geführt, eine Ellipse, und die Bodenfläche ist ebenfalls die einer Ellipse; alle dazwischen fallende parallele Schnitte geben gleichfalls Ellipsen-Flächen.

Die Innhalts-Berechnung eines solchen Fasses sezt zuvörderst die Elementar-Kenntnisse von der Behandlung elliptischer Flächen voraus. (Siehe in der Anl. zur Cub. R. S. 157 ... 162; und in d. Belehr. f. Geom. S. 112 ... 130.) Alsdenn denkt man sich bei dem Faß vier Axen oder Durchmesser. In Fig. XVII. sei der Bauchschnitt ABDE eine ellipt. Fläche, AD die große Ellipsen-Axe = 7 Schuh, BE = 6, die kleine Axe; bei dem Boden sei ad ebenfalls eine Ellipsen-Axe, = 5; und die durch n gehende Linie = $4\frac{2}{7}$ Schuh die kleine Axe. Die Fläche der Spunden-Ellipse wird, als
($7 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3{,}14$) berechnet = 32,9700 Qu. Sch. seyn.
Die Fläche der Boden-Ellipse aber
($5 \cdot 4\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3{,}14$) = 16,8214 Qu. Sch.
Jezt stelle man sich vor, eine dünne elliptische Scheibe, eben die Fläche der Spund-Tiefe, also 32,97 .. Qu.Sch. haltend, bewege sich durch eine Linie, wie no, senkrecht fort; und no sei = 8 Schuh lang. Damit

wird ein Körper von dem cub. Innhalt = 263,760 Cub. Sch. vor uns stehen.

Eben diese Bewegung durch no geschehe mit der kleinern Scheibe, deren Fläche = 16,8214.. Qu. Sch. ist. Es wird gleichfalls ein ähnlicher Körper entstehen, mit dem Innhalt

$(16,8214) . 8 = 134,5712$ Cub. Sch.

Von diesen 2 Körpern nehme man die arithm. Mittel-Proportionale:

$\frac{1}{2}(263,760 + 134,5712) = 199,1656$ Cub. Sch.

Diese Zahl von Cub. Schuhen kommt dem Innhalt des Oval-Fasses in Näherung zu, insoferne man annimmt, dessen Größe falle in die Mitte zwischen die erwähnten 2 Körper hinein.

Gegen diese Annahme werden in vielen Fällen sich Zweifel erheben lassen. Darum sind auch 3 bis 4 andre Methoden ersonnen worden, Oval-Fässer zu berechnen. Eine derselben ist folgende:

Man sucht 1) aus den 2 Axen der 2 Ellipsen zwei mittlere Durchmesser, (nach Lamberts Formel, oder auch nach einer andern); denkt diese als D und D'. 2) Die geometrische Mittelproportionale aus diesen wird $d = \sqrt[2]{(D . D')}$ gedacht. Dieses d sieht man 3) als den Diameter der Grundfläche eines Cylinders an, bei welchem die Höhe = no bleibt, wie vorher nach Fig. XVII. und nun berechnet man den Cylinder nach der bekannten Formel; (dd).(Höhe).($\frac{1}{4}$ 3,14).

Das Product giebt den Innhalt des Oval-Fasses in Cub. Schuhen und Cub. Zollen ...

Beispiel in Zahlen: Die 4 Axen seien die vorigen. Nun wird

$D = (\frac{2}{3} \cdot 7 + \frac{1}{3} 6) = \frac{20}{3}$ seyn.

$D' = (\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \frac{30}{7}) = \frac{1}{21} (70 + 30)$ oder $\frac{100}{21}$

Also $dd = \frac{20}{3} \cdot \frac{100}{21}$ oder $\frac{2000}{63}$; und Qu. Wurzel hieraus $= d$ Aber in der folgenden Berechnung selbst braucht man in der That diese Wurzel, oder d, nicht, sondern blos dd, wie die Cylinder Formel es mit sich bringt; man ist also nur des in der Theorie angegebenen Wurzel-Auszugs in der Anwendnng enthoben, und darf blos berechnen, was die 3 Factoren ausgeben:

$\frac{2000}{63} \cdot 8 \cdot (\frac{1}{4} \cdot 3{,}14) = 199{,}365$ Cub. Schuh.

Sieht man auf die vorher auf anderem Weg erhaltene Innhalts-Zahl: 199,165 zurük, so zeigt sich ein sehr geringer Unterschied; nur $\frac{2}{10}$tel eines Cubik-Schuhes, welche in Maaßen sich nur etwa auf 2 $\frac{1}{2}$ Maaß belaufen. Der Innhalt des Fasses geht über 15 $\frac{9}{10}$ Eimer; oder genau, nach der ersten Methode ausgeworfen, sind 15,933 Eimer, nach der zweiten = 15,949 Eimer vorhanden. Auch wenn man ein zirculares Faß von 15 Eimer nach zweierlei Methoden ausrechnet, wird auf eine Differenz von 2 bis 3 Maaßen beinahe gar nicht geachtet.

Noch ein drittes Verfahren, den Innhalt von

Oval-Fässern zu berechnen, wird in mehrern Büchern so angegeben:

Man nehme die 4 Axen, zwei von der Spunden-Ellipse, und zwei von dem elliptischen Boden, deren Summe werde durch die Zahl 4 dividirt; und der Quotient als der mittlere Diameter eines Faß-Cylinders angesehen. Z. B. in den obigen Zahlen $(7 + 6 + 5 + 4\frac{2}{7})$ ist $= 22\frac{2}{7}$. Diese Summe durch 4 dividirt, giebt $5\frac{4}{7}$ oder 5,57142 Schuhe = d. Und nun wird gerechnet, wie gewöhnlich beim Cylinder:

hier also: $(5{,}57142)^2\ 8 \cdot \frac{1}{4}\ (3{,}14) = 194{,}935$ Cub. Schuh. Was damit heraus kommt, steht bedeutend niedriger als der Erfund nach den vorhergehenden 2 Methoden sich gezeigt hat. Diese 3te Methode ist daher, wenn sie gleich von manchen Schriftstellern empfolen wird, doch nur sehr mit Vorsicht anzuwenden, und immer das, was sich nach ihr ergiebt, mit dem, was aus einer der andern erfolgt, zu vergleichen.

Ueber die Berechnung des Gehalts nicht voller Fässer.

§. 16.

Vorkenntnisse von Kreis-Segmenten und Kreis-Segmenten-Tabellen; und von deren Vortheilen.

Ein hohler Cylinder sei mit einer Flüssigkeit nicht ganz voll angefüllt, und liege horizontal auf einer Ebene. Man wird sich den körperlichen Raum, welchen die Flüssigkeit einnimmt, leicht als ein Cylinder-Stük vorstellen können. Verbindet man die Fig. XV. und Fig. XVIII. in Tab. II. mit der hiebeigezeichneten Figur, so wird man unter MNOF sich den liegenden Cylinder, und unter MFpd das Cylinderstük wohl denken können. Stellte man den Cylinder senkrecht auf einen ebenen Boden, und das Cylinderstük eben so, wäre MN der Durchmesser der Grundfläche des Cylinders; Mp aber wäre ein Pfeil (Sagitta) eines Kreis-Segments, welches die Grundfläche des jezt stehenden Cylinderstüks ausmachte. Da die Höhe in beeden Körpern gleich ist, so werden die Cubik-Inhalte dieser 2 Körper sich allgemein so vorstellen lassen:

N	. . . .	O
S . . p . . T	. . .	d
:		:
:		:
M	. . . .	F

$(MN)^2 \cdot 0{,}7854 \cdot h$ = Inh. des Cylinders
(Segment MSpT) . h = Inh. des Cyl.-Stüks.

Wer die Vorträge auf S. 145 und S. 146 in der Anleitung zur Cub. Rechn. oben gefaßt hat, wird das Product der 3 Factoren für den Cylinder, wie es hier steht, wohl verstehen. — Bei dem Cylinderstük aber bedeutet (Segment MSpT) eine berechnete Fläche, welche als Zahl betrachtet, mit der Zahl der Höhe, h, den Cub. Inhalt des Cylinderstüks nothwendig geben muß. Wer nur wenige Vorkenntniße aus den erwähnten Vorträgen mitbringt, sieht dieses gewiß ein. Es kommt nun darauf an, wie man die Fläche eines solchen Kreis-Segments, wie MSpT ist, am leichtesten berechne. Die Kenntniß davon, wie man es auf dem gewohnten Weg berechnet, durch Folgerung von dem Pfeil auf eine Sehne, von dieser auf einen Kreisbogen, von diesem auf einen Kreisausschnitt, von welchem ein Dreiek abgezogen wird — muß man aus der Geometrie hier voraussezen. *) Weil aber solche Berechnungen von Kreisabschnitten zwar nicht schwer, aber doch meistens beschwerlich und zeitraubend sind, so haben schon vor 100 Jahren gelehrte Mathematiker darauf gedacht, eben diese Arbeit durch Segmenten-Tabellen zu erleichtern. J. M. Bayer, und lange nach ihm M. Rönnberg (1747) haben bei der Annahme eines Kreis-

*) Man sehe in meiner Belehrung für Geometrie hierüber S. 90 S. 100 S. 128 nach.

Diameters D = 100 (Zoll), die zu den Pfeilen 1, 2, bis 99 (Zoll) gehörigen Kreisabschnitte berechnet, und die Rönnberg. Segmenten-Tafel ist insbesondere in viele Bücher eingerückt worden, namentlich von Pf. Wurster in s. Einl. in die Geom. von Pr. Späth u. a. m. Da aber die berechneten Zahlen darinn nicht genau sind, weil die Grund-Verhältniß-Größe 1 : P nicht = 1 : 3,1415926 angenommen war, so theile ich eine schärfer berechnete Tabelle hier mit, in welcher auch selbst die Kr. Segmente für die Pfeile $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ u. s. w. vorkommen, und füge dazu noch die Logarithmen der Flächen-Zahlen bei. Wer diese nicht benüzen kann, halte sich immer an die Segmenten-Zahlen allein. Der Gebrauch wird am besten durch ein paar Beispiele deutlich gemacht werden.

Aufgabe: Wenn ein Kreis-Diameter 12 Zoll lang wäre, ein Pfeil in einem Kr. Abschnitt der Kreisfläche aber 3 Zoll lang, das Quadrat-Maas der Kr. Abschnitts zu finden!

Man findet es, vermittelst Berechnung von nicht mehr als zwei Proportionen; das 4te Glied in der IIten Prop. giebt das Quadr. Maas des verlangten Abschnitts schon vollkommen. Die Ueberzeugung hievon wird man so erhalten: In dem Kreis, dessen Diameter d = 12 ist, steht ein Pfeil = 3; welcher also unter einen gewissen Kreisbogen zugehöret. Darneben befinde sich ein Kreis, mit D = 100 gezeichnet, und in demselben ein Pfeil, welcher zu

einem Kr. Bogen von gleich vielen Graden gehören. Wie lang oder hoch wird der Pfeil in diesem Kreis seyn? Nothwendig = 25. Denn die Proportion kann nicht anders heißen, als

$$12 : 3 = 100 : 25$$

da ähnliche Kr. Bögen gefordert oder vorausgesezt werden. Nun sehe man sich nach der Größe der 2 Kreis-Abschnitte, in welchen die 2 genannten Pfeile 3 und 25 in den Kreisen stehen, um. Die Flächen-Größe des zweiten in dem Kreis, der mit D = 100 beschrieben worden, steht in der Segmenten-Tabelle, neben dem Pfeil 25; sie ist 1535,462. Die Fläche dieses ganzen Kreises ist = 7853,981, weil dessen Diameter D = 100 angenommen ist. Man darf dafür 7854 sezzen, (nach dem Vortrag der schon citirten Stelle S. 145.)

Die Fläche des Kreis-Abschnitts in dem kleinern Kreis, in welchem d = 12 ist, wird sich nun sogleich finden lassen, wenn man nur zuvor dessen ganze Kreisfläche berechnen mag. Diese ist, der Formel $(DD \cdot \frac{1}{4} \cdot 3{,}14\ldots)$ gemäs, $= (12)^2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot 3{,}14)$ · oder $144 \cdot (0{,}7854)$. Der Kreis-Abschnitt darinn (mit dem Pfeil = 3) muß sich gegen seine ganze Kreisfl. verhalten, wie der Kreis-Abschnitt in dem größern Kreis zu der Kreisfläche in dem gedachten größern Kreis, das ist: wie 1535,462 zu 7854. Dieses berechtigt zu Aufstellung der Proportion:

$$7854 : 1535{,}462 : 144 \cdot (0{,}7854) : x$$

Darinn enthält das 4te Glied den gesuchten Kreis-

Abschnitt. Das Product der mittlern Gliedern, durch das erste dividirt, giebt die Zahl: 22,1106. So viel Qu. Zolle hält der Kr. Abschnitt, in welchem der Pfeil = 3 Zoll, steht. Damit die Rechnung leicht von statten gehe, so sezze man in das erste Glied anstatt 7854 die 2 Factoren: $(100)^2$ ($\frac{1}{4}$.3,1415..) d. h. 10000.(0,7854) hat man

10000.(0,7854): 1535,462 = 144.(0,7854): 22,1106.

Aber damit sieht jeder in dem 1sten und 3ten Glied einen und denselben Factor: 0,7854. Dieser darf also wegbleiben, so daß blos noch die Zahlen zu sehen seyn werden;

10000 : 1535,462 = 144 : 22,1106

Wer sogleich (vor 10 Zeilen schon) an den Saz gedacht hätte: Zwei Kreisflächen verhalten sich immer wie die Quadrate ihrer Diameter, würde ohne Verzug 100^2 und 12^2 in das 1ste und 3te Glied eingesezt haben...

Man stelle die 2 Proportionen jezt kurz zusammen:

Pr. I.) 12 : 3 = 100 ; 25

Pr. II.) 10000 : 1535,462 = 144 : 22,1106

So einfach fällt die ganze Rechnung aus, um das Problem zu lösen.

Die Kreis-Verhältniß-Zahl: 3,14 oder 0,7854 fällt bei dieser Methode in der Pr. II. ganz gleichsam aus der Rechnung heraus; und, da die Division mit dem 1sten Glied, 10000, kaum eine Arbeit nur zu nennen ist, indem man ja sogleich die Pr. II.

so schreiben kann:

$$1 : 0{,}1535462 = 144 : 22{,}1106$$

so erfordert das Haupt-Verfahren, welches doch immer auf der Prop. II. ruht, nur eine Multiplication. (Selbst darf man meistens in dem 2ten Glied die lezten Decimalen ganz weglassen.)

Doch liegt noch etwas bey dem 4ten Glied der 1sten Proportion im Hinterhalt. Die Zahl für dieses Glied wird sich unter der Reihe der Pfeile nicht jedesmal so vorfinden, wie es sich wohl hier mit 25 gefügt hat. Wäre z. B. der Kreisdiam. d = 13; der Pfeil = 4, und man suchte hiezu das Kreissegment; so würde die Iste Proportion so stehen:

Pr. I.) $13 : 4 = 100 : 30{,}761$

In der Segmenten-Tabelle finden sich die Pfeile 30,5 und 31; aber kein 30,761; also auch kein zugehöriges Kr. Segment. Man kann daher auch nicht sogleich, (wie es in dem vorigen Beispiel wohl angegangen,) zu Pr. II übergehen; sondern muß hier noch zuvor eine Mittel-Arbeit vornehmen. Es ist ein sogenanntes Interpoliren nöthig, oder eine Einschaltung durch Proportional-Theile. Weil 30,761 zwischen 30,5 und 31 fällt, so zieht man die Differenz zwischen den 2 Segmenten-Zahlen, welche zu 31 und und $30\frac{1}{2}$ gehören, schreibt also:

$$\begin{array}{r} 2073{,}764 \\ 2027{,}617 \\ \hline 46{,}147 \end{array}$$

und benützt diese Differenz zu Auf-

stellung einer Proportion, welcher der (freilich nicht scharfgeprüfte) Schluß zum Grund liegt *), „die Segmente wachsen, wie die Zunahmen (Incremente) der Pfeile." Diese Proportion ist in diesem Fall folgende:

	0,5	:	46,147	=	0,261	: x
oder	1	:	46,147	=	0,522	: 24,088

zu dem 4ten Glied anddirt man sogleich 2027,617

(das kleinere der 2 Segm.) u. die Summe 2051,705 wird für das jezt eben erforderliche, in die IIte

*) Man erlaubt sich bei diesem Schluß etwas, das nicht ganz richtig ist; man nimmt dabei an: „die Flächen von 2 nicht um viel zunehmenden Segmenten wachsen wie die Höhen der Pfeile." Von 0,5 bis 1,0 wächst das Kreis-Segment um 46,147 wirklich; also (denkt man) wird es auch von 0,5 bis auf 0,761 eben so verhältnißmäßig (nach einfacher Regel de Tri) wachsen. Und eben darum sezt man in das 2te Glied der obenstehenden Proportion den Betrag von (0,761 — 0,5) oder 0,261 ein. Damit begeht man in der That einen Irrschluß. Allein, die Abweichung von der Wahrheit beträgt bei dieser Annahme so wenig, daß man das angeführte Increment mit 24,088 in der Rechnung zuläßt, und damit durch eine einfache Addition das erforderliche Kreis-Segment als Zahl hervor bringt. Man gesteht diese Licenz zu, weil in der praktischen Anwendung eben diese Abweichung von der Strenge so viel als nichts beträgt; wenigstens nichts, was einer ernstlichen Anfechtung nur werth wäre.

Proportion passende Kr. Segment, angesehen; und in deren 2tes Glied eingesezt. Die 2 Proport. stehen jezt so:

Pr. I.) 13 : 4 = 100 : 30,761

Pr. II.) 10000 : 2051,705 = 169 : 34,673

In der IIten Pr. hätte allerdings auch, (wie oben S. 61. gedacht worden) gesezt werden können:

7854 : 2051,705 = 169 . (0,7854) : 34,673

Aber man bleibt bei der oben gerechtfertigten Abkürzung bei allen hierhergehörigen Aufgaben forthin durchaus.

Man füge dem allem nur folgendes noch bei: Die zwei berechneten Kr. Segmente 22,1106 und 34,673 können Grundflächen von 2 Cylinderstükken seyn. Man nehme dieses an; deren Höhen oder Längen seien h oder L; in Concreto bestimmte Zahlen, vielleicht beide gleich, z. B. L = 6 Zoll; so wird

(22,1106) . 6 . = Cub. Innh. eines Cylinderstüks

(34,673) . 6 . = Cub. Innh. eines andern

bedeuten, und das Product dieser 2 Factoren jederzeit den Betrag in Cubikmaas geben. Allgemeiner ist immer (Segm.) . L = Cub. Inhalt eines Cylinderstüks.

§. 17.

Anwendung der nächstvorherg. Vorträge auf die Berechnung nicht voller Fässer.

Ein nicht volles Faß, ist, der körperlichen Form nach, kein Cylinderstük. Man sehe in die Fig. XVIII.

und vergleiche sie mit der zunächst beigesezten Zeichnung. MFpd würde ein solches Cylinderstük vorstellen. Allein, weil der bauchichte Theil MCFH zu dem Faß gehört, so ist kein Cyl. Stük vorhanden. Man erwäge aber, daß bei dem ganzen Faß ebenfalls bauchichte Wölbungen, oben und unten, statt finden, und daß man das (immer hierzircular-angenommene) Faß dennoch in einen Faß-Cylinder verwandelt, und als solchen berechnet. Man bestimmt einen mittlern Kreis-Durchmesser nach einer der oben angeführten Formeln. Wir bleiben hier bei der auf S. 16. angegebenen ($D = \frac{2}{3} V + \frac{1}{3} F$). Es kommt jezt darauf an, daß bei dem nicht vollen Faß ein mittlerer (coäquirter) Pfeil mittelst einer gewissen Voraussezzung und Dichtung der Einbildungskraft hervorgebracht werde, so wie bei dem vollen Faß ein ganzer mittlerer Durchmesser. Man mache sich deshalb mit nächststehender Gedankenfolge wohl bekannt:

In dem nicht vollen Faß gehe die Flüßigkeit an den Seiten, d. h. an den Faßböden nicht ganz herauf, sondern nur von M bis p; sie wird dabei zugleich in die Linie der Spund-Tiefe von C bis

G gehen. Man nenne die Linie CG = W (Weinhöhe unterm Spund in der Mitte); die Linie Mp aber wird sich = W — $\frac{1}{2}$ (F — V) bezeichnen lassen. Um dieses einzusehen, erinnere man sich aus S. 45 oben, daß die kleine Linie, (unten am Bauch) HC = $\frac{1}{2}$ (V — F) jederzeit sei. Aus der Figur ersieht man ferner augenscheinlich, daß

CG — HC = Mp sei;

also CG — $\frac{1}{2}$(V — F) = Mp; oder W — $\frac{1}{2}$(V — F) eben so viel.

Man nennt Mp die Wein-Nässe an den Böden, und deren Betrag ergiebt sich diesem nach immer, als Zahl, wenn man 1) die Differenz nimmt V — F 2) diese halbirt, und 3) diese Helfte $\frac{1}{2}$(V — F) von der gemessenen Weinhöhe unterm Spund abzieht. So ist mit Worten die Regel ausgesprochen, wie man die Wein-Nässe jedesmal bestimmt; und die Worte sagen das, was die Formel in Kürze andeutet: W — $\frac{1}{2}$(V — F) = Mp.

Nun erlaubt man sich einen gewissen analogischen Schluß, welcher zu dem Ausdruck eines mittlern Pfeils oder einer mittlern Weinhöhe führt, und zwar auf folgende Weise: Man erlaubt sich zu denken, und auszusprechen, daß

($\frac{2}{3}$ CG + $\frac{1}{3}$ Mp) = (Pf)*, d. h. ein mittlerer Pfeil eben so gut seyn dürfe, als man bekanntlich

($\frac{2}{3}$ V + $\frac{1}{3}$ F) = D*, d. h. für einen mittleren

Kreisdiameter

immer annimmt. (S. oben S. 16 — 19). Offenbar ist CG ein Stük der Spundtiefen-Linie V; und Mp ist ein Stük des Faßboden-Diameters.

Gegen diese analogische Schlußart könnte man nun zwar manches einwenden. Denn man erhält, indem man sie zuläßt, in der That, genau genommen, keinen ganz richtigen mittlern Pfeil für ein mittleres Kreis-Segment. Allein man giebt die Formel auch nur für eine Näherungs-Formel aus, und daß man den Innhalt eines nicht vollen Fasses mittelst derselben zureichend genau ausrechnen könne, hat sich doch durch wiederhohlte Proben und Erfahrungen bestätiget. (*)

(*) Einige bilden die zu einem mittlern Pfeil nöthige Formel etwas anders, und sezzen so:

$$W - \frac{1}{4}(V - F) = (Pf)^*$$

So ist die Vorschrift des Pf. Wursters in seiner Einleit. zur Geom. in §. 270 unter I. nr. 3. 4. Den Grund giebt er nicht an; auch andere Praktiker, welche darnach verfahren und rechnen, und die ich selbst nach diesem Grund gefragt habe, wissen ihn nicht. Er ist aus der Formel des arithmet. Mittels (Siehe oben S. 12. 13.) abzuleiten. Denn, so wie nach derselben $(\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}F) = D^*$ gilt, so wird nun auch verstattet zu sezzen $(\frac{1}{2}CG + \frac{1}{2}Mp)$ das ist $= \frac{1}{2}W + \frac{1}{2}(W - \frac{1}{2}[V - F])$ welcher Werth wirklich nicht mehr, als $W - \frac{1}{4}(V - F)$ beträgt. Die im Text oben empfohlene Rechnungs-Formel giebt aber den gesuchten Gehalt genauer.

Es ist jezt nur noch nöthig, daß man dieser Formel durch eine Umbildung eine schiklichere Gestalt gebe: Man sieht leicht ein, daß

$$\tfrac{2}{3}\,CG + \tfrac{1}{3}\,Mp \quad = (\text{Pf})^*$$

so viel, als $\tfrac{2}{3}\,W + \tfrac{1}{3}(W - \tfrac{1}{2}[V - F]) = (\text{Pf})^*$ sei. Dieser lezte Werth läßt sich aber kürzer ausdrükken:

$$W - \tfrac{1}{6}(V - F) \quad = (\text{Pf})^*$$

weil nehmlich $\tfrac{2}{3}\,W + \tfrac{1}{3}\,W = W$ ist, und $\tfrac{1}{3}$ mal $\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6}$.

So bald man dieses gefaßt, und die Zuläßigkeit dieser Formel, oder Vorschrift, den mittlern Pfeil zu erhalten, zugestanden hat, so ist gar keine Schwierigkeit mehr vorhanden, den Innhalt eines jeden nicht vollen Fasses, als den körperlichen Raum eines Cylinderstükkes zu berechnen. Denn für jeden Pfeil, und also auch für einen mittleren, läßt sich eine bestimmte Zahl angeben, weil W, V und F drei aus Messungen bekannte, bestimmte Zahlen sind; und die Größe $W - \tfrac{1}{6}(V - F)$ jeder Anfänger aufs genaueste ausrechnen kann. Zu diesem Pfeil gehört ein Kreisabschnitt, und dessen Fläche ergiebt sich nun nach dem Vortrag S. 66 durch Hülfe der Segmenten-Tabelle. Sie ist die Zahl in dem 4ten Glied der Prop. II. Wird diese endlich mit der innern Länge des Fasses, welche beim vollen und nicht vollen Faß gleich ist, (immer = L) multiplicirt, so ist eben damit der verlangte Innhalt oder Betrag der Flüssigkeit in Cubikmas bestimmt.

§. 18.

Zwei Beispiele von Berechnungen nicht voller Fässer in wirklichen Zahlen.

Man nehme das oben S. 9. und S. 16. angeführte Faß, in welchem die 3 Dimensionen V = 5,6 Schuh; F = 5; L = 6 waren, und sezze, statt der Schuhe, alles in Zollen V = 56; F = 50; L = 60. Der mittlere Durchmesser für einen Faß-Cylinder wird $= \frac{1}{3}(2\,V + F) = \frac{1}{3}(2 \cdot 56 + 50)$ d. h. = 54 seyn. Das Faß sei nicht voll. Die Höhe des Weins unter dem Spundloch, oder CG = W, sei $41\frac{1}{2}$ Zoll. Die wahre Weinnässe an dem Faßboden, Mp, wird daher $38\frac{1}{2}$ seyn, weil

$$Mp = W - \tfrac{1}{2}(V - F)$$

hier $4{,}15 - \frac{1}{2}(56 - 50)$ oder $4{,}15 - 3 = 38{,}5$ beträgt. Der mittlere (oder coäquirte) Pfeil ist nun der Formel gemäs $W - \frac{1}{6}(V - F)$

$$41{,}5 - \tfrac{1}{6} \cdot 6 = 40{,}5.$$

Daher ist dann 40,5 = (Pf)*. Zu diesem Pfeil suche man das zugehörige Kreissegment. Die 2 Proportionen, welche man zu berechnen hat, können (nach S. 61.) keine andre seyn, als

Pr. I) 54 : 40,5 = 100 : 75

Pr. II) $10000 : 6318{,}52 = (54)^2 : 1842{,}48$

Da das Qu. von 54 die Zahl 2916 ist, so ist das Produkt der mittlern Glieder, durch das 1ste divid. $= (0{,}631852 \cdot 2916) = 1842{,}48$. So viel Quadr. Zolle hält das Kreissegment, das ist hier der

Boden des Cylinderstüks. Man multiplicire mit $L = 60$; so erhält man desselben Cubik-Innhalt, als (1842,48 . 60) = 110548,8 Cubik-Zoll, oder 110,548 Cub. Sch. Man dividirt in diese Zahl mit 12,5 (nach S. 10. oben). Man bekommt hierdurch 8,8439 Eimer od. 8 Eim. 135 M. So viele Eim. und Maas sind in dem nicht vollen Faß, welches, gefüllt, etwas über $10\frac{9}{10}$ Eimer gehalten hat. (nach S. 17.)

Zweites Beispiel. Man stelle sich das oben S. 19 als voll berechnete Faß, mit den 3 Dimensionen $V = 5,9$; $F = 5$ (*); $L = 6,5$, jezt nicht ganz angefüllt vor; und zwar betrage die Weinhöhe unter dem Spund CG oder $W = 44\frac{1}{2}$ Zoll genau gemessen. Wir wollen auch die genannten 3 Dimensionen in Zollen nehmen $V = 59$; $F = 50$; $L = 65$. Die Weinnässe an den Böden wird 40 Zoll seyn, weil $Mp = W - \frac{1}{2}(V - F)$ jezt $44\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(59 - 50)$ oder $(44,5 - 4,5) = 40$ ist. Die mittlere Weinhöhe aber, oder (Pf.)* mus, der Vorschrift S. 68. gemäs, 43 Zoll betragen, indem

$$W - \frac{1}{6}(V - F) = 44,5 - \frac{1}{6} \cdot 9 \text{ od. } (44,5 - 1,5)$$

(*) Aus Versehen steht S. 19. (oben in Z. 2) $F = 4$; Aber sogleich darauf die richtigere Zahl $F = 5$; und darnach immer ebendieselbe (5); auch auf S. 21 und S. 44 jederzeit richtig.

genau 43 ausgiebt. Hieraus folgert man nächststehende Säzze in zwei Proportionen:

Pr. I.) 56 : 43 = 100 : 76,785

Pr. II.) 10000 : 6471,169 = 3136 : 2029,358

weil nehmlich der mittlere Durchmesser

$\frac{1}{3}$ (2 V + F) = $\frac{1}{3}$.168 oder 56 ist. Das Quadrat von 56 aber ist 3136. Damit hat man die Zahlen für das 1ste Glied in Prop. I. und für das 3te in Prop. II.

Das mittlere Kreissegment aber, welches für das 2te Glied in Prop. II. nöthig ist, bekommt man so: (Pf)* ist = 76,785 .. in Pr. I.

Aus der Segm. Tab. schreibt man

zu Pf. 77 6489,332

zu Pf. 76,5 6447,093

Differenz: . . . . 42,239. Es wird jezt sofort weiter geschlossen;

0,5 : 42,239 = 0,285 (*) : 24,076

Man addirt das kleinere Segment + 6447,093

und erhält hiemit 6471,169

(*) Auch hiebei mus man die Decimalen in 76,785 um 0,5 verringern, d. h. (0,785 — 0,5) sezzen, oder 0,285; und diese Zahl giebt uns das 3te Glied in die Proportion ab, wie oben S. 63. Wäre eine Zahl 76,185, oder 76,485 (statt 76,785) vorgekommen, so hätte man unverändert 0,185 ... oder 0,485 in das gedachte 3te Glied eingesezt, und es hätte keine Subtraction nun

Diese Zahl wird in das 2te Glied der Prop. II. eingeschrieben, (auch wohl abgekürzt = 6471,17). Die Zahl im 4ten Gl. folgt daraus. Sie giebt den Boden des Cylinderstüks, d. h. die Fläche, welche mit der Länge L = 65 multiplicirt, den Innhalt des nicht vollen Fasses an das Licht bringt:

(2029,358 . 65) = 131610 Cubik-Zolle, oder 131,106 Cubik-Schuhe, welche in Würtemb. Eimern = 10,55308 Eimer oder 10 Eim. 88½ Maas ausmachen.

Schluß-Resultate: 1) Um die Berechnung eines nicht vollen Fasses führen zu können, muß man 4 Data haben; die Größen V, F, L und W müssen durch unmittelbare Messungen, als Zahlen, bekannt seyn; also ein Datum mehr, als bei jedem ganz vollen Faß, nehmlich die Weinhöhe unter dem Spund, CG oder W. Die andern 3 Data sind die 3 Faß-Dimensionen V, F, L.

2.) Nach der gezeigten Methode kann man den Innhalt eines nicht vollen Fasses bestimmt fin-

---

statt gefunden. Denn (0,185 — ,0) würde keine wahre Subtraktion gewesen seyn. Man muß also gleichsam zwei Regionen der Differenzen sich denken; die obere von 0 bis 0,5; und die untere von 0,5 bis 1,0. Nur in der untern ist 0,5 von den vorhandenen Decimalen abzuziehen.

den, (*) ohne daß nöthig wäre, den Innhalt des ganzen vollen Fasses vorher berechnet zu haben. Man darf nur die 4 Glieder der Prop. II. aufmerksam ansehen, um sich von dieser Behauptung zu überzeugen. Bei andern Methoden, welche in mehreren Schriften vorkommen, ist immer der Cub. Innhalt des vollen Fasses ein wesentlich-erforderlicher Theil der Rechnungssäzze, mittelst welcher man die Aufgabe, ein nicht volles Faß zu berechnen, auflöst.

(*) Und zwar in einer Zeit von 12 Minuten. Jeder geübte Rechner braucht gewiß nicht länger, von dem Moment an, wenn ihm z. B. der Küfer die 3 Faßdimensionen, V, F, L, und die Weintiefe unterm Spund, W, aus dem Keller herauf bringt, und als Zahlen ausspricht. Die erwähnte Erforderniß von 12 Min. rechtfertiget sich so: Die ganze Rechnung läßt sich in 8 Stationen eintheilen. Diese sind: 1) Bestimmung des mittl. Durchm. $D^* = \frac{1}{3}(2V + F)$. 2) Bestimmung der mittl. Weinhöhe $= W - \frac{1}{6}(V - F)$. 3) Aufstellung und Berechn. der Prop. I. 4) Ausmittlung des richtigen Kr. Segments (durch Ziehung einer Diff. u. durch Proport. Theile). 5) Erhebung des mittl. Durchm. D^* ins Quadrat. 6) Berechnung der Prop. II. 7) Multiplication des 4ten Glieds derselben mit L, (mit d. Länge des Fasses). 8) Verwandlung des erhaltenen Cubikmases in Eimer und Maase des Landes. — Gesteht man jeder Station $1\frac{1}{2}$ Min. zu, so wird der Weg durch alle 8 Stationen in 12 Minuten zurükgelegt.

Hier folgt nun die Segmenten-Tabelle selbst.

Pf.	Kr. Segm.	Logarithm.	Pf.	Kr. Segm.	Logarithm.
1	13,2933	1,1236295	19½	1078,427	3,0327908
1½	24,3842	1,3871095	20	1118,238	3,0485343
2	37,4846	1,5738529	20½	1158,420	3,0638675
2½	52,3075	1,7185641	21	1198,975	3,0788103
3	68,6557	1,8366766	21½	1239,882	3,0933805
3½	86,3828	1,9364274	22	1281,137	3,1075955
4	105,3772	2,0227542	22½	1322,729	3,1214710
4½	125,5466	2,0988052	23	1364,650	3,1350215
5	146,8150	2,1667705	23½	1406,887	3,1482593
5½	169,1159	2,2281844	24	1449,447	3,1612025
6	192,3935	2,2841904	24½	1492,307	3,1738581
6½	216,5980	2,3356543	25	1535,462	3,1862391
7	241,6843	2,3832484	25½	1578,906	3,1983564
7½	267,6143	2,4275093	26	1622,632	3,2092201
8	294,3515	2,4688663	26½	1666,631	3,2218394
8½	321,8623	2,5076704	27	1710,896	3,2332238
9	350,1180	2,5442144	27½	1755,421	3,2443813
9½	379,0897	2,5787420	28	1800,196	3,2553198
10	408,7530	2,6114610	28½	1845,218	3,2660476
10½	439,0823	2,6425460	29	1890,477	3,2765714
11	470,0560	2,6721497	29½	1935,968	3,2868983
11½	501,6535	2,7004038	30	1981,683	3,2970288
12	533,8540	2,7274224	30½	2027,617	3,3069861
12½	566,6400	2,7533071	31	2073,764	3,3167592
13	599,9926	2,7781458	31½	2120,114	3,3263592
13½	633,8949	2,8020172	32	2166,663	3,3357915
14	668,3315	2,8249919	32½	2213,407	3,3450613
14½	703,2872	2,8471327	33	2260,337	3,3541732
15	738,7472	2,8684958	33½	2307,447	3,3631319
15½	774,6973	2,8891320	34	2354,732	3,3719417
16	811,1239	2,9090872	34½	2402,187	3,3806069
16½	845,0142	2,9271947	35	2449,810	3,3891314
17	885,3560	2,9471179	35½	2497,580	3,3975194
17½	923,1364	2,9652659	36	2545,505	3,4057740
18	961,3451	2,9828794	36½	2593,578	3,4138993
18½	1000,0486	3,0000213	37	2641,790	3,4218982
19	1039,001	3,0166160	37½	2690,138	3,4297744

38	2738,613	3,4375306	57	4624,697	3,6650834
38½	2787,212	3,4451701	57½	4674,169	3,6697043
39	2835,930	3,4526955	58	4723,566	3,6742700
39½	2884,760	3,4601097	58½	4772,880	3,6787804
40	2933,698	3,4674154	59	4822,107	3,6832368
40½	2982,738	3,4746152	59½	4871,243	3,6876399
41	3031,875	3,4817113	60	4920,283	3,6919902
41½	3081,103	3,4887062	60½	4969,221	3,6962883
42	3130,417	3,4956022	61	5018,050	3,7005351
42½	3179,814	3,5024017	61½	5066,770	3,7047312
43	3229,284	3,5091063	62	5115,368	3,7088770
43½	3278,827	3,5157184	62½	5163,845	3,7129732
44	3328,435	3,5222401	63	5212,191	3,7170204
44½	3378,101	3,5286727	63½	5260,404	3,7210191
45	3427,825	3,5350187	64	5308,476	3,7249698
45½	3477,600	3,5412796	64½	5356,402	3,7288732
46	3527,418	3,5474569	65	5404,175	3,7327295
46½	3577,277	3,5535526	65½	5451,795	3,7365395
47	3627,172	3,5595681	66	5499,249	3,7403034
47½	3677,096	3,5655049	66½	5546,535	3,7440217
48	3727,043	3,5713645	67	5593,647	3,7476950
48½	3777,013	3,5771476	67½	5640,575	3,7513234
49	3826,998	3,5828583	68	5687,318	3,7549075
49½	3876,998	3,5884948	68½	5733,868	3,7584477
50	3926,991	3,5940499	69	5780,219	3,7619443
50½	3976,991	3,5995546	69½	5826,366	3,7653977
51	4926,984	3,6049799	70	5872,298	3,7688081
51½	4076,968	3,6103374	70½	5918,014	3,7721760
52	4026,938	3,6156279	71	5963,506	3,7755016
52½	4176,887	3,6208527	71½	6008,763	3,7787851
53	4126,811	3,6260128	72	6053,786	3,7820271
53½	4276,705	3,6311093	72½	6098,562	3,7852274
54	4326,566	3,6361432	73	6143,086	3,7883866
54½	4376,382	3,6411152	73½	6187,353	3,7915049
55	4326,157	3,6460268	74	6231,350	3,7945822
55½	4475,880	3,6508724	74½	6275,076	3,7976189
56	4425,548	3,6556712	75	6318,520	3,8006154
56½	4575,156	3,6604059	75½	6361,675	3,8035715

Pf.	Kr. Segm.	Logarithm.	Pf.	Kr. Segm.	Logarithm.
76	6404,534	3,8064875	88½	7352,329	3,8664249
76½	6447,093	3,8093636	89	7383,627	3,8682874
77	6489,332	3,8122000	89½	7414,899	3,8701052
77½	6531,253	3,8149965	90	7445,228	3,8718780
78	6572,846	3,8177534	90½	7474,894	3,8736050
78½	6614,100	3,8204708	91	7503,864	3,8752850
79	6655,006	3,8231485	91½	7532,120	3,8769172
79½	6695,560	3,8257868	92	7559,632	3,8785006
80	6735,744	3,8283855	92½	7586,369	3,8800339
80½	6775,556	3,8309449	93	7612,297	3,8815158
81	6814,982	3,8334647	93½	7637,382	3,8829446
81½	6854,012	3,8359448	94	7661,590	3,8843189
82	6892,638	3,8383855	94½	7684,866	3,8856363
82½	6930,845	3,8407862	95	7707,169	3,8868949
83	6968,627	3,8431472	95½	7728,436	3,8880916
83½	7005,968	3,8454681	96	7748,666	3,8892235
84	7042,860	3,8477491	96½	7767,599	3,8902868
84½	7079,287	3,8499895	97	7785,328	3,8912769
85	7115,233	3,8521892	97½	7801,674	3,8921878
85½	7150,694	3,8543482	98	7816,497	3,8930122
86	7185,652	3,8564661	98½	7829,597	3,8937394
86½	7220,086	3,8585424	99	7840,689	3,8943542
87	7253,989	3,8605769	99½	7849,274	3,8948295
87½	7287,342	3,8625692	100	7853,981	3,8950899
88	7320,129	3,8645187			

Anm. Die Gehalte von nicht vollen Fässern, welche man vermittelst dieser 200 Kreis-Segmente unmittelbar aus der Segm. Tabelle (ohne Prop. Theile) berechnet, kommen ganz mit denen überein, welche man bekommt, wenn man dazu der Lambertischen Segm. Tafel, so wie solche Hr. L. Obereit in d. Leipz. May 1786, verbessert, mitgetheilt hat, sich bedient. So oft man aber das Kr. Segm. erst durch Prop. Theile (nach S. 63) bestimmen muß, wird man, woferne man am Ende beede Rechnun-

gen vergleicht, kleine Abweichungen ersehen. Diese betragen jedoch bei 800 Maasen, nicht einmal $\frac{1}{4}$ Maas. Darüber wird aber wohl niemand zu streiten Lust haben.

Es hätte mir an Raum, und an Zifern gefehlt, die Oberreitische Tafel mitzutheilen. Auch fehlen dieser bis jezt Logarithmen. Ich habe es deshalb für räthlich erachtet, die Rönnbergische so viel möglich zu berichtigen und durchgehends mit Logarithmen zu versehen. Unverbessert ist sie schon lang in den Händen vieler Praktiker. So wie sie jezt erscheint, wird sie, wie ich hoffe, von nicht unbedeutender Brauchbarkeit seyn.

Uebrigens erhält man jederzeit für jeden unsrer 199 Pfeile oder Kreisabschnitthöhen die Zahl des Segments, wie sie in der Lambert-Oberreitischen Segmenten-Tafel sich vorfindet, wenn man unsre Segmenten-Zahl mit 7853,981 dividirt. Wer die Grundlage der Lambertischen Segmenten-Tafel kennt, wird die Ursache dieses Verfahrens leicht einsehen.

Drukfehler,

zu der Abhandl. von der Fässer-Rechn. gehörig.

S. 19. Lin. 2. statt F = 4 lies F = 5.
S. 34. Lin. 7. statt 1470,11 lies 1473,64.
" " Lin. 8 und 9. lies 18,8626 und 15,09 Min. anstatt der Zahlen allda.
S. 75. Lin. 6. von unten 4326,566 l. 4326,560.

Beisaz.

Um sich zu überzeugen, wie nützlich es sei, bei den Berechnungen nicht voller Fässer auch Logarithmen anzuwenden, gehe man noch das hier beifolgende erläuternde Beispiel aufmerksam durch. Es wird zugleich dienen, die Vorträge S. 72 und 73 vollends ganz zu verstehen:

So oft der mittlere Faßdurchmesser D* in der Berechnung als eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruch ausfällt, (z. B. als $56\frac{2}{3}$) wendet man gewiß immer mit großem Vortheil Logarithmen an.

Es sei V = 59; F = 52; L = 65. Die Weinhöhe unter dem Spund, W = 41; Wie viel Wein liegt in dem Faß?

Man rechne zuerst ohne Logarithmen:

1) $D^* = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot 59 + 52) = \frac{170}{3}$ d. i. 56,666 (3.)

2) Mittl. Weinh. $= W - \frac{1}{6}(V - F) = 41 - \frac{7}{6}$ od. $\frac{239}{6}$

3) Die Prop. I.) $\frac{170}{3} : \frac{239}{6} = 100 : (\frac{2390}{34} = 70{,}2941)$

4) Aus d. Segm. T. bei 70,5 .. 5918,014 } 45,716
bei 70 .. 5872,298 }

Also 0,5 : 45,716 = 0,2941
oder 1 : 45,716 = 0,5882 : 26,918

Summe: = 5899,216

5) Das Quadrat von D* ist $(56{,}666)^2 = 3211{,}111$

6) Die Prop. II. 1 : 0,5899,216 = 3211,11 : 1894,302

7) Cubik-Innh. (1844,302) . 65 = 123139.
Und 8) Betrag in Maasen: 1576,06

Benüzznng der Logarithmen:

Für nr. 1) Lg. 56,666	= 1,7533276	
Für nr. 3) Lg. 2390	= 3,3783979	
— Lg. 34	= 1,5314789	
(Absolut-Zahl: 70,2941)	= 1,8469190	
Für nr. 4) Lg. 45,716	= 1,6600682	
Lg. 0,5882	= 0,7699799	— 1
(Abs. Zahl: 26,918)	= 1,4300481	
Für nr. 5 u. 6) Lg. 0,58992	= 0,7707942	— 1
Lg. $(56,666)^2$	= 3,5066552	
(Abs. Zahl: 1894,302)	= 3,2774494	
Für nr. 7. Add. Lg. 65	= 1,8129134	
(Abs. Z. (123139 Cub. Z.)	= 5,0903628	
Für nr. 8. Subtr. Lg. $78\frac{1}{8}$	= 1,8927900	
Abs. Zahl: (1576,06)	= 3,1975728	

Hiemit hat man die gesuchte Anzahl der Maase erhalten, welche in dem Faß sind. Es sind 9 Eim. $136\frac{3}{50}$ Maas; wie man ersieht, wenn man mit 160 in 1576,06 dividirt. Auch kann man den Lg. 160, welcher 2,2041200 ist, von 3,1975720 abziehen. Es bleibt übrig 0,9934528 und zu diesem Logar. gehört die Zahl: 9,85037... So viel Eimer liegen noch in dem Faß; also über $9\frac{8}{10}$ Eimer; genauer 9 Eimer 136 Maas.

Wer mit Eich- und Visier-Geschäften umgeht, sollte immer die Multipla der Zahl 160 von 1 bis 9 vor sich haben, oder auswendig wissen. Damit kennt er (9.160) = 1440. Diese Zahl zieht er von 1576,06 ab; und kann sogleich den Betrag der Eimer und Maase aussprechen.

Erläuterungen zu den 2 Figuren S. 57. und S. 65.

Die Faßböden sind bei allen Zirkular-Fässern wirkliche Kreise. In Zeichnungen werden sie perspectivisch als Ellipsen, oder als sogenannte Ovale, dargestellt. So liegen die Puncte N und M in Fig. XV. in Tab. II. in einer Kreis-Peripherie. Eben so die 4 Punkte MNST in der Figur auf S. 57 sind Punkte in einem wirklichen Kreis; und NST bezeichnet daher nothwendig einen Kreisabschnitt. Der untre größre Kreisabschnitt ist MST. Jedem dieser Abschnitte kommt eine Höhe zu, ein Pfeil; dem kleinern der Pfeil Np, dem größern Mp.

Wenn man den leeren Theil eines nicht vollen Fasses berechnen will, so muß man sich zuerst mit dem Pfeil Np beschäftigen, und einen mittlern Pfeil suchen, weil man nun ein mittleres Kr. Segment nöthig hat für die Weinleere. Das Verfahren ist im Wesentlichen ebendasselbe, wie das gezeigte.

Innhalts-Anzeige

derjenigen Gegenstände, welche in der Abhandlung von der Fässer-Berechnung vorkommen.

alphabetisch geordnet.

Seite

Abgekürzte Ellipsoide, wenn es dienlich sey, Fässer als solche anzunehmen, und darnach zu berechnen . . . 14. 15. 21. 16. 27.

Abgekürzter Kegel, wie dessen Berechnung bei Fässern angewendet werde . . 14.

Abschnitte (Kreisabschnitte) an den Faßböden . . . . 52. 65. 66.

Aehnliche Fässer; Erklär. welchen diese Benennung zukomme . . . . 44.

Aehnliche Körper, allgem. Grundsaz dabei 36.

Arithmetisches Mittel, wie und wann es bei Faß-Berechnungen angewendet werde? . . . . 6. 9. 19. 34.

Axe, die große, in der Ellipse, wie man sie finden könne, wenn auch nur ein abgekürztes Ellipsoid vorhanden ist . . 24.

Berechnungen des Innhalts ganzer Fässer, (bestimmte) kommen vor auf . 10. 13. 15. 17.

——————— des Innhalts nicht voller Fässer . . . . 69. 70. 79.

*

Seite

Cubischer Visier-Stab; das einfache Verfahren damit wird gezeigt . . 35. 39.

——————— wie die Bezeichnung auf denselben, (die Zahlen, die Einschnitte darauf) gesezt werde . . 38 — 40.

——————— wird meistens im Gebrauch zu weit ausgedehnt. Davon 49 — 52.

Cylinder (Walze) über die zu dessen Berechnung gehörige Formel . . . 8. 16.

——— verglichener, (coäquirter); was diese Benennung bedeute. . . 7.

Dauben, (Faßdauben); die kürzeste darunter . . . . 8.

Dimensionen, die drei, des Fasses, welche es seien? . . . . . . 21. 35.

——————— über die Nothwendigkeit, Kenntniß von ihnen zu haben, auch bey dem Cub. Visier-Stab . . . 48. 49.

Durchmesser des Faßbodens; von der Rücksicht auf dessen Dicke . . . 34.

——————— der mittlere (verglichene) davon 12. 65.

Eich-Proben, und Vergleichungen derselben mit angestellten Berechnungen; auch über die Mißlichkeiten der Angaben dabei 12. 16. 29 — 31.

Eimer, Gehalt des Würtembergischen, und wie er aus dem Cubik-Maase erhalten werde . . . . 10. 11. 79.

Fässer, am Hals ausgestoßen, oder nicht ausgest. . . . . . . 20. 31.

——— von verschiedener Art, nach Geschlechtern geordnet . . . 42. 43.

Faß-Stich, was derselbe sey, und womit er in Vergleichung gesezt werde . . Ebendas.

Inhalts-Anzeige

nach dem Alphabet geordnet, über die Gegenstände, welche in der Anleitung zur Cubik-Rechnung vorkommen.

	Seite
Abgekürzte Multiplikation, Verfahren dabei	20. 24.
Abgekürzte Pyramide, Berechnung derselben und Formel dazu . .	143.
Abgekürzter Conus, Berechnung u. Formel	151 — 153
Abkürzung der Rechnungen und Verfahren dabei	20 — 29.
Abkürzungen, wann solche wohl erlaubt seien . . .	20. 46. 47. 109.
Alte Rechner, ihr Verfahren, verglichen mit dem der Neuern . . .	21. 24.
Baierische Fruchtmaaße, deren Inhalt wird verglichen	150.
Bauchichte Körper, wie ihr Inhalt berechnet werde	155. 156.
Brüche, über die Beschwerlichkeit, mit ihnen zu rechnen	2 — 135.
— — Vortheile, bei ihrer Behandlung anzuwenden . . .	72. 73.

Seite

Brüche werden manchmal weggelassen, ohne den Nachtheil der Folgen davon zu bedenken . . . . . . 28. 29.

Constructionen, geometrische der Linien in dem Kreis . . . . 7.

— — in wie weit solche zureichend seien oder nicht . . . . 113.

Cubik-Schuh, Vorstellung desselben in Theilen und deren Vergleichung, wenn man Decimal- und Duodecim. Theile gegen einander hält . . . 36 — 39.

Cubikwurzel, Art, sie auszuziehen, oder sich ihr zu nähern; die erste Art 52 — 58.

die 2te durch Reihen . . 60 — 76.

die 3te nach Newtons Formel . 77 — 88.

Cubikwurzeln, aus bestimmten Zahlen: aus 2, 3—10 . . . . . 48.

— — aus 200, 2000; aus 34, 5, 5 49. 70. 88.

Cubus einer zweitheiligen Größe, und Entwiklung der Formel . . . 52.

Cylinder, Verfahren ihn zu berechnen 144 — 149.

Decimalen, dienlich selbst bei Berechnung nach dem Duodecimal-Maaß . . 31. 33.

— — Multiplication mit Decim.-Größe 10 — 17. 20.

— — Cub.-Zolle, vergl. mit Duodec.-Cub.-Zolle . . . . 12. 13. 36.

Dikke der Gewölbe, wie man sie berechne 166.

Dimensionen, drei, bei Körpermessungen 127. 135

Durchmesser des Kreises und Umfang; Verhältniß-Zahlen . . . 145. 146.

Eichmaaße und deren Gehalt, (besonders in Würtemb.) . . . 87 — 90.

Seite

Einmal-Eins für die Zahl 1728 und $\frac{1}{1728}$ . . . . 35. 41.

Einmal-Eins auch für die Decim. aus der Cubik-Wurzel von 3 . . . 106.

Ellipsoiden und elliptische Sphäroiden, wie man deren Inhalt finde . . . 157 — 163.

Factoren, die drei, bei jeder Cub.-Rechnung vorkommende . . 9. 21. 135.

Fehler, in Schriften verbreitete, werden angezeigt . . . 57. 168. 170.

Formeln zu Berechnungen, besonders für den Cubus . . . . 52. 80.

——— dienlich, das Gesez der Reihen einzusehen . . . . 63 — 75. 103.

Geometrie, Nothwendigkeit der Vorkenntnisse aus derselben . . . 6.

—— — höhere und niedere . . 113. 155.

Geometrische Construktionen 112. 115. 118.

Gewölbe, Verfahren, deren Inhalt zu berechnen . . . . . 164 — 167.

Grundlinie für den Würfel, und Methode, sie bei gewißen Voraussetzungen zu finden . . 114. 123. 128.

Halbirte Linien, und über den Würfel darauf . . . . . 95.

Heben (aufheben) der Zahlen bei Factoren, über die Vortheile davon . . 3. 10. 145.

Indirecte Methode, Grundlinien der Würfel zu finden . . . 126.

Interpolation, Hinleitung zu diesem Verfahren . . . 76.

Seite

Irrational-Größen, wie sich die Lehre davon leicht beibringen lasse . . 43. 44. 50.

——— welche sich als Linien jederzeit darstellen lassen . . 118.

——— welche, (durch geom. Construction) nur unter gewissen Bedingungen 120. 123

Kegel, (Conus) der ganze, wie er berechnet werde . . . . 152.

——— der abgestumpfte . . 153.

Kegel-Schnitte u. Curven, welche dadurch entstehen; davon . . . . 8. 9. 13. 113.

Klostergewölbe, Vorstellung davon; und Verfahren, ein solches Gew. zu berechnen, 164. 165.

Kreis-Umfang, als Vieleck von unendlich viel Seiten . . . . . 145.

Kugel, die ganze; wie ihr cub. Innh. berechn. werde. 157

——— Abschnitte; wie ihr cub. Innhalt berechnet werde. . . . . . 158.

——— mit Sphäroiden von Ellipsoiden dergl. . . . . . 161.

Längen etlicher vorzügl. wichtiger Linien 93. 94. 113. 133.

Linien, zwey cubirte, wie sie sich verhalten bei irrationalen Ausdrücken . . 95.

——— welche zwey (in einer Figur) als zwei geomet. Mittel-Proportionalen anzusehen seyen . . . . . S. 171.

Logarithmen; über die Vortheile ihrer Anwendung . . . . . 59.

——— Beyspiele davon ausgeführt 136. 138.

Multipl. Vortheil kleiner Tabellen. davon 35. 41.

——— der Zahlen 7854 und 7853,9. besonderer Gebrauch davon . . . 145. 149.

	Seite
Fundamental-Verhältniß (Grund-Verhältniß) was es bey dem Faß sey und Formel dazu	42.
Halbe Summe von V + F; und Gebrauch davon	12. 17.
———————— von V — F; und Gebrauch davon	45. 66. 67.
Hals der Fässer; Wölbung dabei; hievon	20. 31.
Gleichung (Ordinaten-Gleichung) der Ellipse wird angeführt und benüzt	23.
Innhalt der Fässer; wann die Berechnung darüber gewöhnlich zu klein ausfalle	13. 31.
wenn dagegen zu groß? . . .	20.
Kreis-Rechnungen; von nicht ganz genauen, und schärfern	11. 59.
Kugel-Abschnitte, wie man solche bey gesenkten Faßböden gebrauchen könne	32. 33.
Lamberts Regeln, ein Faß zu berechnen; und Streit darüber	16. 19. 27.
Länge, die innere des Fasses; deren Verkürzung betr.	34.
Meisterstücke; ehemal. strenge Vorschriften bey denselben	50. 51.
Nachhülfe durch Correctionen bey gewissen in Rechnung genommenen Fässern .	31. 32.
Ordnungen, alte über Grund-Verh. und Spitzung der Fässer; davon . . .	50.
Oval-Fässer, wie man solche anzusehen, und zu berechnen pflege (auf verschiedene Weise)	51. 52.
Pfeil (Höhe in Kreisabschnitten) wirklich gemessener und mittlerer (verglichener)	60. 65. 66.

Seite

Senkung der Faßböden, wie man Rücksicht darauf zu nehmen, und sie in Rechnung zu bringen habe . . . 32 — 34.
Stiche, auf welche die Fässer gefügt sind; wie deren Zahl bestimmt werde . 42. 43. 48.
——— Beschränkung auf eine gewisse Zahl in einigen Gegenden . . . . . 51.
Tabellen für Kreis-Segmente über deren Einrichtung, Gebrauch und Nutzen . 62. 64. 74.
Verhältniß zwischen der innern Länge des Fasses, und dem Faß-Stich; davon 42.
Verwandlung des bauchichten Faßkörpers in einen Cylinder; davon . 4 — 6. und S. 65.
Vorkenntnisse, welche nöthig seyen, um Fässer-Berechn. gehörig vorzunehmen 3. 4.
Visier-Linie, zu einem Faß gehörig, wie man sie finde . . . . . 38. 41. 47.
Visieren durch Querstäbe, in welchen Fällen das Benehmen dabey statthaft und richtig sey . . . . . 36 — 41.
——— wann es ohne Befugniß angewendet, und zu weit ausgedehnt werde 48. 60.
Visier-Ruthe, Grundlage darauf, und deren Bestimmung zum Aufzeichnen der andern Abtheilungen auf der Ruthe; oder zur Prüfung schon fertiger Stäbe 40. 41.
Wein-Höhe unter'm Spunden, und an den Faßböden; davon . . . S. 66. 68.
Wölbung der Fässer (auch Spitzung genannt); wie deren Größe bestimmt werde; auch Formeln dazu . . . 42. 48.
——— Einfluß der Wölbung auf den Faß-Innhalt; davon . . . 15. 19. 20.
Zeit, wie viel nöthig sei, nicht volle Fässer zu berechnen . . . . . 73.
Zircular-Fässer, was unter dem Ausdruck begriffen werde . . . . 52. 53.

Innhalt der Abhandlung von der Fässer-Berechnung,

nach den Paragraphen geordnet.

§. 1. Ueber die nöthigen Vorkenntnisse, um solche Berechnungen führen zu können S. 3. 4.

§. 2. Ueber walzenförm. Körper, oder Faß-Cylinder . . . . . . S. 4—7.

§. 3. bis §. 8. Ausführung besonderer Faßberechnungen nach verschiedenen Formeln, insbesondere nach einer von Lambert vorgeschlagenen, und nach einer von der Ellipsoiden Rechnung entlehnten S. 8—28.

§. 9. Von Maas-Proben durch wirkliches Eichen . . . . . S. 29. 30.

§. 10. Ueber die Berechnung der Senkungen in den Faßböden . . . S. 31—34.

§. 11. Ueber das Verfahren, durch cubische Querstäbe Fässer zu visieren; und über die Gründe der Bezeichnungsart auf diesen S. 35—41.

§. 12. Ueber das Grund-Verhältniß beim Bau der Fässer; und über deren verschiedene Spizzung . . . S. 42—44.

§. 13. Ueber die geom. Bestimmung der sogenannten Visier-Linie . . . S. 45—49.

§. 14. Ueber die unstatthafte Anwendung der Visierstäbe . . . . S. 50. 51.

§. 15. Ueber verschiedene Arten, Oval-Fässer zu berechnen . . . . . . S. 52. 56.

§. 16. 17. Ueber die Berechnung nichtvoller Fässer; dabei vor allem, über Kreis-Segmenten-Tabellen; und die Art, solche zu benüzzen . . . . S. 57—68.

§. 18. Ausführungen von drei Beispielen, welche die Berechnung nicht voller Fässer in Concreto zeigen . . . . . S. 69—79.

Seite
Multiplication mit Decimalen . 32.
Natürliche Zahlen; Gesetz bey ihrem Fortgang; durch eine Formel dargestellt . 102. 103.
Näherung gesuchter Größen, wie solche gemeint sey . . . . 52. 41. 61.
Parallelepipedum, das senkrechte; über dessen Benennung und Berechnung 134.
——————— über das schief stehende . . . . 139.
Pariser Längen und Cubik-Maase; deren Vergleich. mit andern . . 168. 170.
Product und Verhältniß zweyer Größen; was man damit ausrichten könne 115. 116.
Prismatische Schnitte durch den Cub. geführt; Vortheil dieser Vorstellung 37. 39. 57.
Prisma das viereckigte; nothwendige Rücksicht darauf . . . . . . 122. 124. 140.
Pyramide die ganze, wie man sie cubisch berechne . . . . 139.
——————— die abgekürzte . . . 142. 143.
Quadrate von Irrational-Größen; Ausdrücke . . . . 92. 93. 113.
Quadrat-Wurzel der Zahlen von 1—9 48. 98.
Reihen (Progressionen von stetigen Proportionen ausgehend); und deren besondere Anwendung . . . . . 59. 98.
Zu vergleichen mit S. 171.
Scrupel im Cubikmaas; davon . . 22.
Schlüsse, rückwärts führende; deren Wichtigkeit . . . . 44. 66. 69.
Simmri, das Würtemb. Fruchtmaas, wird verglichen . . . . 149. 169.

Seite

Unendliche Decimal-Brüche; Beseitigung der Anstände darüber . . . 13. — 19.

Unendlich viele Prismata, alle einem Würfel gleich . . . . . 123.

Verhältniß von 2 Cub.-Wurz. ist oft sehr leicht gegeben; sie selbst aber nicht . 116.

Würfel, der hohle; und Querlinien in demselben . . . . . . 92. 93.

——— Verdopplung des Würfels; und Weg, die Grundlinie dazu zu finden 109.

——— auf einer Grundlinie, die ein Kreis-diameter ist, vorgestellt . . . 128 — 130.

——— auf einer Sehne in demselben Kreis; und Gleichung dazu . . . . . 115 — 116.

Wurzel-Größen, die sich linearisch dar-stellen lassen . . . . . . 118.

——————— welche andre nicht; oder nicht so leicht . . . . . 131. 132.

Staatliche Bibliothek Passau

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schübler, Christian Ludwig,

Nachtrag zu der Anleitung zur Cubik-Rechnung, insbesondere die Lehre der Fä
sser-Berechnung betreffend

Stuttgart 1817

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 141
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346102-4